

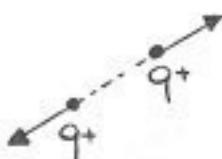
Appunti del Corso di Elettrotecnica A

Docente: Paolo Maffezzoni

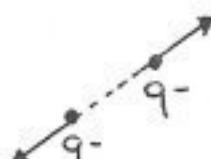
Per studiare il funzionamento dei circuiti elettrici, dobbiamo sapere che esso si basa su "fenomeni elettrici", e "magnetici". I fenomeni dei primi sono di elettrizzazione, cioè dovuti allo sfioramento tra oggetti i quali si elettrizzano. Quindi:

FENOMENI ELETTRICI:

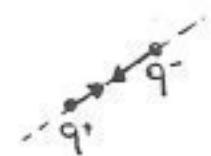
CARICA ELETTRICA: esistono 2 tipi di carica elettrica, uno positivo e uno negativo. Le cariche elettriche (prese in considerazione come PUNTI FORTI) si attraggono e si respingono in seconda classe loro natura:



: due cariche dello stesso segno si respingono



: si respingono in entrambi i casi, cioè sia che siano due cariche positive o due cariche negative



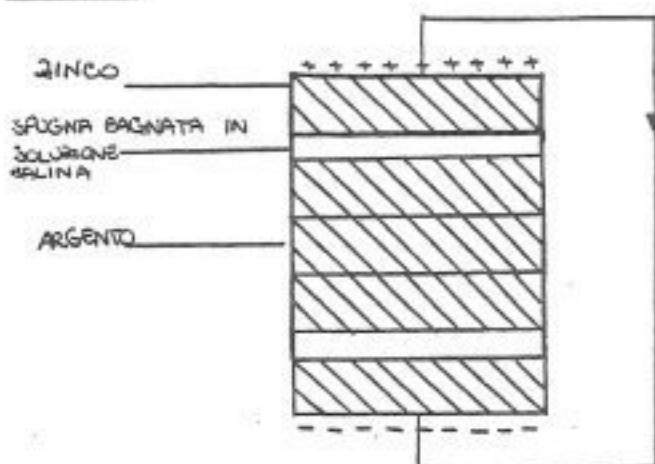
: due cariche di segno opposto si attraggono

La materia è composta da atomi, quindi possiede queste cariche. In condizioni normali le cariche + e - si annullano e tendono a neutralizzarsi, tendendo a rendere l'elemento NEUTRO.

Ma se agiamo sugli oggetti, se per esempio sfreghiamo sul maglione una borsa di plastica, il corpo si carica perché ne vengono tolte cariche (positive o negative). Quindi, per far sì che si verifichino allora fenomeni elettrici bisogna vincere la forza che tiene unite le cariche e separarle. Ricordiamo che per riuscire in questo bisogna quindi compiere un lavoro.

Nella storia, il primo lavoro compiuto in questo senso era stato fatto da Alessandro Volta, ideatore della pila.

PILA:



Nascono così ioni positivi e ioni negativi. Collegando gli estremi delle pile con un metallo, Volta si è accorto che circolava corrente, poiché c'era spostamento di cariche + e -.

Dallo schema mi ricavano allora 2 aspetti:

- Per far nasceere un circuito elettrico necessitiamo di un dispositivo che separe cariche positive dalle cariche negative (generatore che compie lavoro)
- Per far circolare cariche elettriche dobbiamo costruire un circuito che sia "chiuso".

TENSIONE ELETTRICA:

Questa grandezza si ricava dall'aspetto 1. della pila. Mettiamo questa grandezza in relazione con una linea nello spazio:



Percorso generico che va da A a B, ma non vero ben definito.

Una carica posta in A viene spostata fino a raggiungere B. Definiamo tensione elettrica il lavoro compiuto per spostare una carica unitaria dal punto A al punto B lungo una linea (γ).

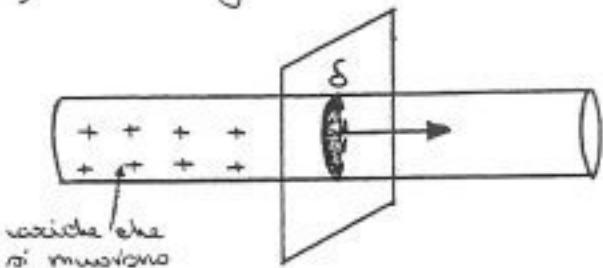
$V(\gamma)$ = lavoro per spostare q da A a B

L'è misurato in $V = \text{volt}$.

CORRENTE ELETTRICA:

Questa grandezza si ricava dall'aspetto 2. della pila.

Se ho un filo (che fa parte di un circuito chiuso con un generatore) e lo taglio:



δ : è una superficie orientata

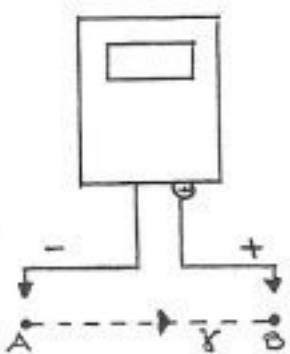
Definiamo corrente elettrica (o anche intensità di corrente) la quantità di carica che attraversa una certa superficie nella unità di tempo.

$i(\delta)$ = carica nell'unità di tempo

Viene misurata in A = ampere.

STRUMENTI PER MISURARE GRANDEZZE ELETTRICHE

VOLTMETRO: strumento che misura la Tensione

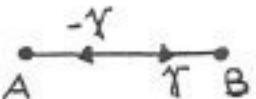


legge in digitale (o analogico), la grandezza. Ha due morsetti, uno rosso (+) e uno nero (-) ai quali sono collegati i puntali.

Per misurare la Tensione, i morsetti vengono collegati lungo una linea y e si secondo di come li colleghiamo ci viene dato il senso di percorrenza della linea

Per misure ha due proprietà che spieghiamo nella facciata successiva.

PROPRIETA' DI DISPARITA':

 Se facciamo una misura sulla linea, a seconda di come andremo ad inserire i puntali del testet otterremo:

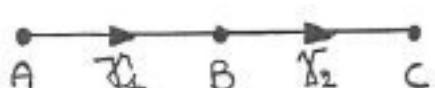
γ : va da A a B

$-\gamma$: va da B a A

Possiamo dunque scrivere che:

$$V(\gamma) = -V(\gamma)$$
, è quindi una disparità.

PROPRIETA' DI ADDITIVITA':



unione delle 2 linee che orientate nella stessa direzione

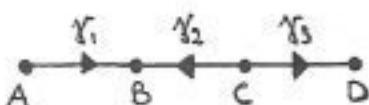
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$V(\gamma) = V(\gamma_1) + V(\gamma_2)$$

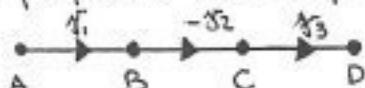
, sommando così algebricamente
Tutti i tratti di linea che
potremmo avere

L'unione delle 2 linee dà un'unica linea γ . $V(\gamma)$ è la somma delle tensioni sulle 2 linee separate.

ESEMPIO:



Tramite le proprietà di disparità posso riscrivere come:



$$V(-\gamma_2) = -V(\gamma_2)$$

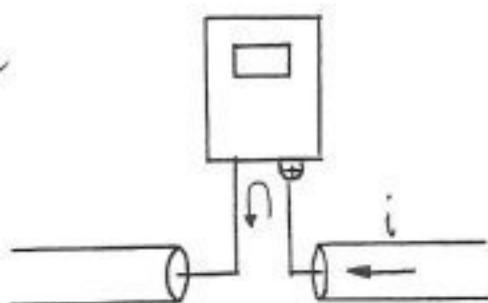
Tramite le proprietà di additività posso riscrivere come:



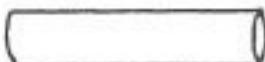
$$V(\gamma) = V(\gamma_1) - V(\gamma_2) + V(\gamma_3)$$

La misura della V sulla linea γ è la somma delle misure delle V fatte sulle γ parziali:

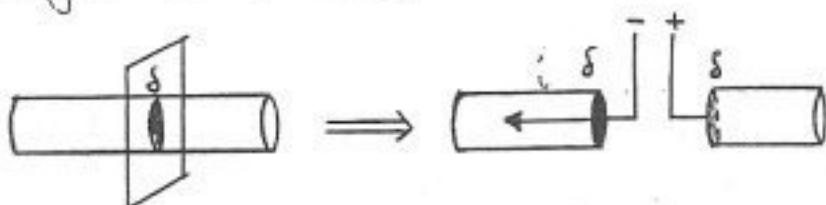
AMPEROMETRO: strumento che misura le correnti



Facendo riferimento al conduttore, possiamo capire come venga fatta la misura. Partiamo dal nostro filo iniziale sul quale vogliamo misurare la corrente circolante in esso:



A questo punto immaginiamo di tagliare tale filo metallico, e collegati alle 2 sezioni ai morsetti dell'amperometro:

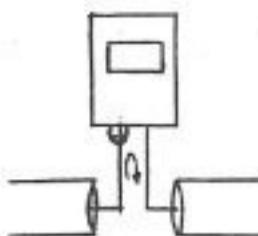


La misura guarda quante cariche elettriche passano, dando una direzione (freccia verde). Per convenzione, il verso positivo di misura è quello che entra dal $+$ ed esce dal $-$.

Anche in questo caso valgono le 2 proprietà viste prima.

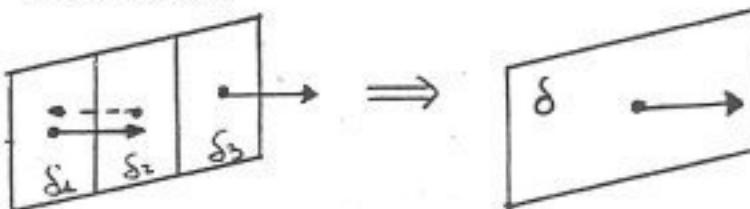
ESEMPIO:

proprietà disparità: se scambio i morsetti alla misura precedente:



$$i(-\delta) = -i(\delta) \quad \text{dispari}$$

proprietà additività:



$$i(\delta) = i(\delta_1) - i(\delta_2) + i(\delta_3)$$

Supponiamo di essere in REGIME STAZIONARIO, cioè con tutti i tensioni costanti nel tempo, tutto fisso ad un certo valore.
Possiamo così introdurre 2 leggi:

LEGGE DELLE TENSIONI:

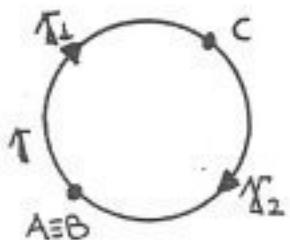
Consideriamo una linea γ chiusa, cioè il punto di partenza della linea coincide con il punto di arrivo B della linea ($A \equiv B$)



Il lavoro compiuto a percorrere l'intera linea è uguale a zero, quindi:

$$U(\gamma) = 0 \text{ V}$$

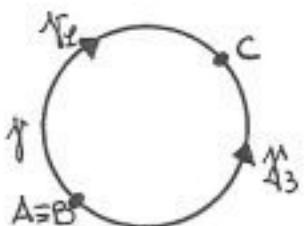
Supponiamo ora che la linea γ sia composta da più linee:



Facciamo in tal modo due misure parziali, e per quanto detto prima:

$$U(\gamma_1) + U(\gamma_2) = 0$$

Nel caso in cui andiamo da A a C in un verso, e da B a C nel verso opposto, cioè:



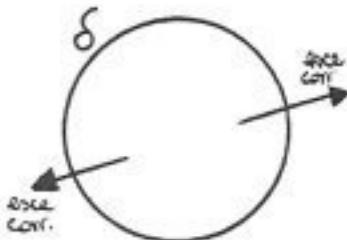
$$U(\gamma_1) - U(\gamma_3) = 0 \text{ V}$$

$$\downarrow \\ U(\gamma_1) = U(\gamma_3)$$

U_{CA} , cioè il lavoro che faccio per andare da A fino a C.

Pertanto, la misura fatta lungo una linea non dipende tanto dall'evolversi della linea, ma solo dagli estremi della linea stessa.

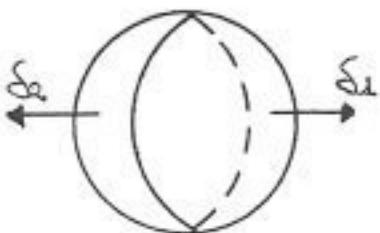
LEGGE DEI CIRCIRENTI



Su una sfera chiusa con orientamento:

$$i(S) = 0 \text{ A}$$

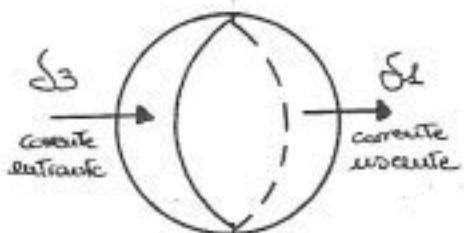
Cio' significa che si dividiamo S in 2 parti:



dalla proprietà di additività:

$$i(S_1) + i(S_2) = 0$$

Se poi consideriamo:



$$i(S_1) - i(S_2) = 0$$



$$i(S_1) = i(S_2)$$

CIRCUITI ELETTRICI

Un circuito elettrico è formato da dispositivi collegati tra di loro. Tutti i dispositivi sono costituiti da due tipi di materiali, ISOLANTE e CONDUTTORE. Vediamo ora la distinzione

MATERIALE ISOLANTE: materiale che si oppone al passaggio di corri elettrici attraverso di esso:

$$i=0, U \neq 0 \rightarrow \text{cioè per tensioni significative}$$

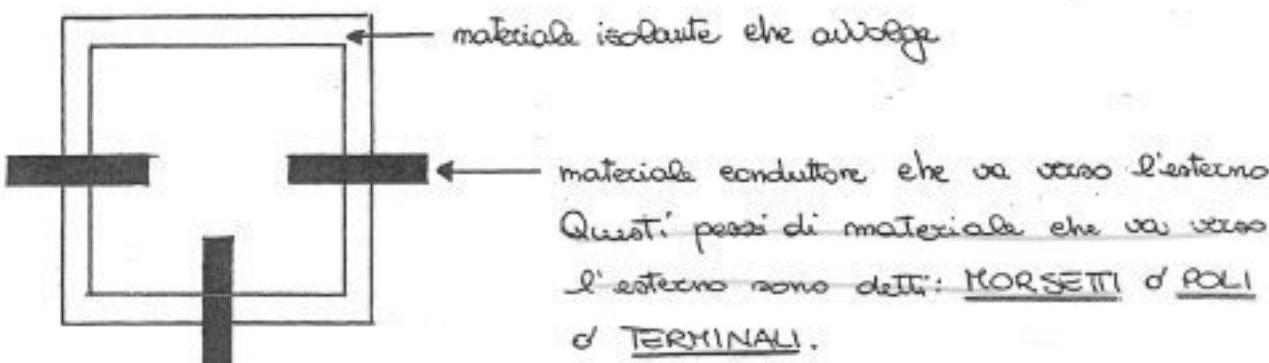
la corrente è = 0.

MATERIALE CONDUTTORE: solitamente è un metallo:

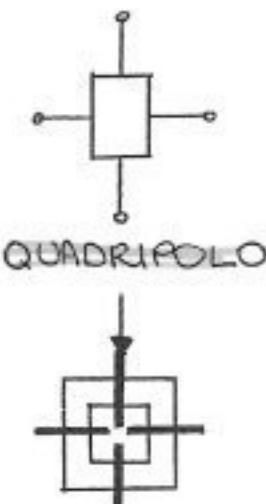
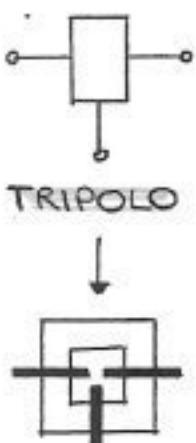
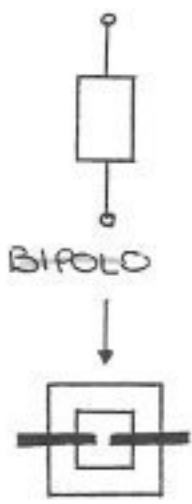
$$i \neq 0, U=0 \rightarrow \text{cioè per correnti significative}$$

la tensione è = 0.

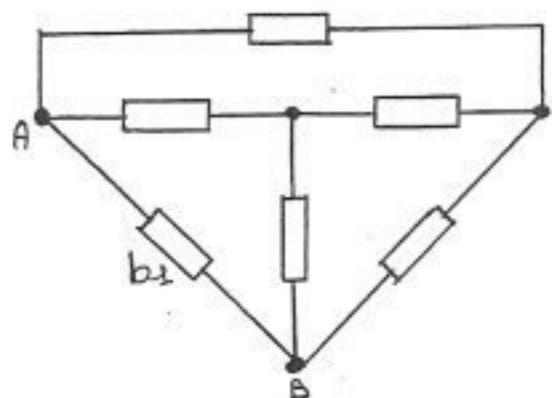
DISPOSITIVI ELETTRICI: possiamo così rappresentarli.



Quindi i dispositivi possiamo così chiamare:

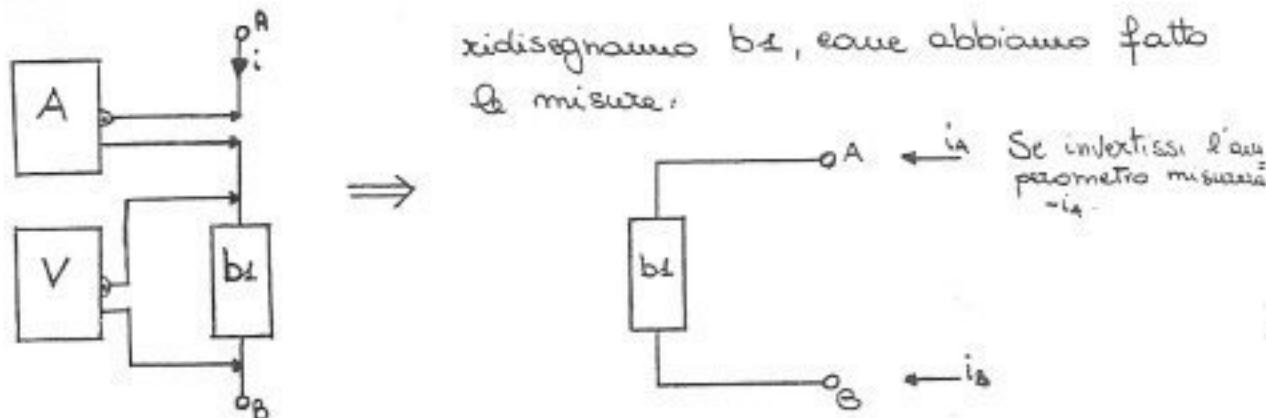


Diciamo quindi allora che un circuito elettrico è formato da più dispositivi (per ora solo bipoli) collegati tra di loro.

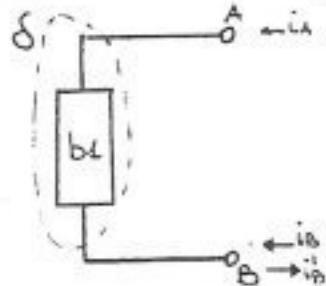


il punto di connessione tra i bipoli è detto NODO.
Pertanto possiamo osservare che nel disegno sono presenti 6 bipoli e 4 nodi.

Ora prendiamo in esame per esempio il bipolo b_1 . Tagliamo il circuito e inserisca l'ampmetro, mentre il voltmetro lo mettiamo "a cavallo" del bipolo:



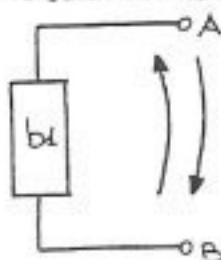
Prima di tutto ho fissato una convenzione di misure, per dare poi un valore ma soprattutto un segno alle misure.
Misurando i_A e i_B , esse sono dipendenti l'una dall'altra:



$$i_A + i_B = 0 \text{ oppure } i_A = -i_B$$

Una sola corrente è indipendente, tutte le altre la ricavo.

Per misurare la Tensione:



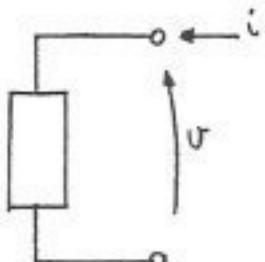
$$U_{AB} = -U_{BA}$$

Una sola tensione è indipendente sul bipolo, tutte le altre la ricavo.

Quindi un BIPOLO ha 2 morsetti, ed è caratterizzato da una sola tensione indipendente ed una sola corrente indipendente. Tale bipolo può essere così chiamato anche PORTA ELETTRICA d LATO.

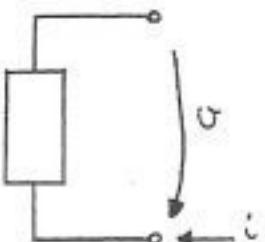
INSERIMENTO DEGLI STRUMENTI SUL BIPOLO:

CONVENZIONE DI MISURA DEGLI UTILIZZATORI:



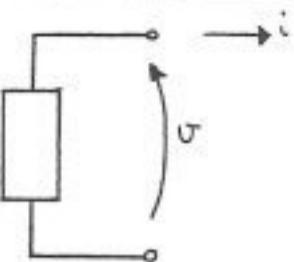
Vengono misurate i e v nel modo indicato dal verso delle frecce. Questo è detta convenzione degli utilizzatori o anche convenzione NORMALE.

Potrai anche misurare in questo modo:



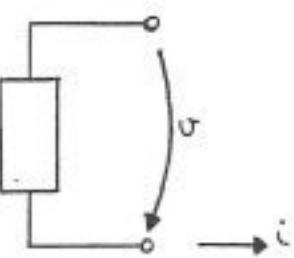
Vediamo che la corrente "entra" nella freccia della tensione.

CONVENZIONE DI MISURA DEI GENERATORI:

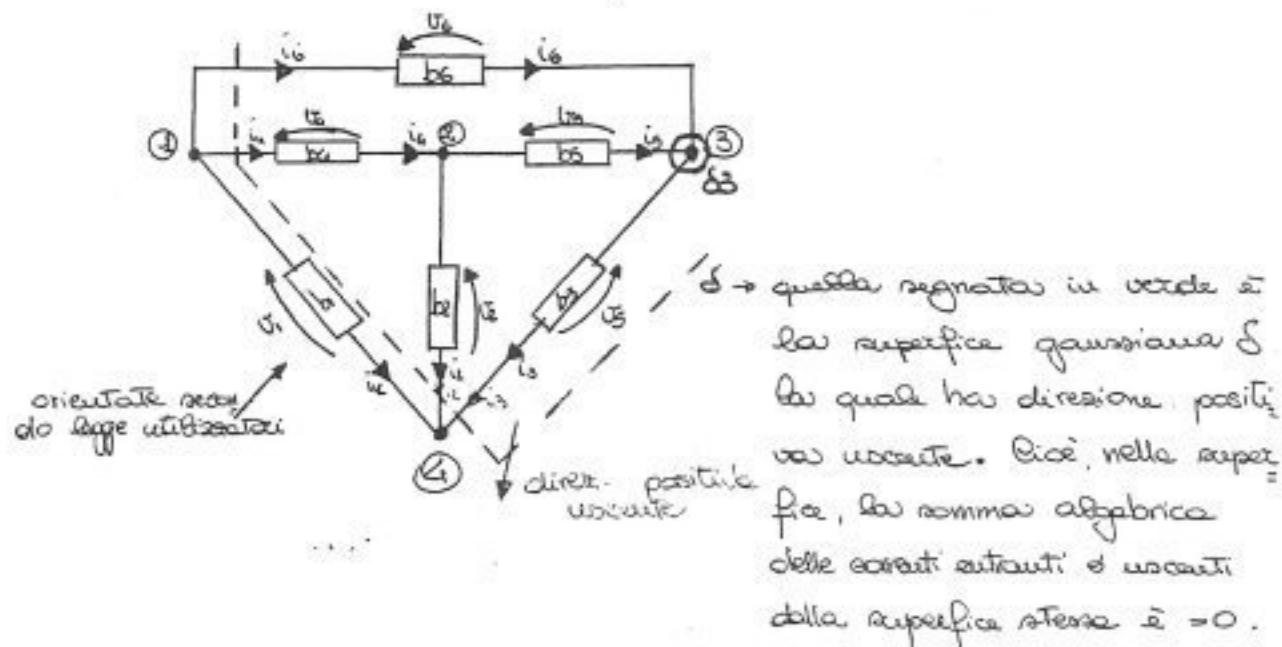


Questa è detta anche convenzione NON NORMALE.

Potrai anche misurare in questo modo:



Ritorniamo ora al circuito di potenza.



LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI: KCL

La somma algebrica delle correnti in δ è uguale a 0.

Quindi, osservando le correnti uscenti e uscenti dalla superficie di taglio δ , posso scrivere la legge delle correnti:

$$i_1 + i_2 - i_4 - i_6 = 0 \quad , \text{ che generalizzando è:}$$

$$\sum_{\text{taglio}} i_k = 0$$

Somma delle correnti su una superficie di taglio è = 0

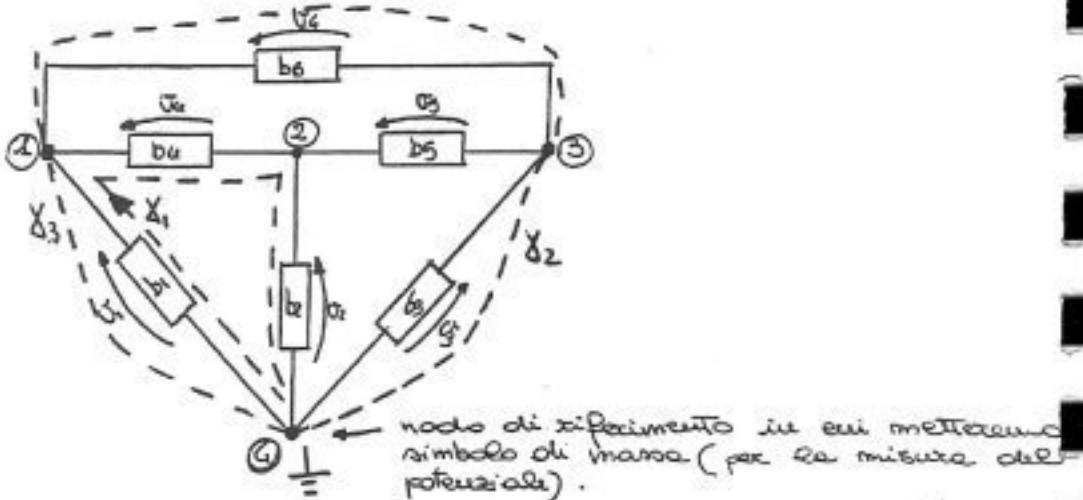
Definiamo ora così δ_3

δ_3 : è una superficie di taglio chiusa (node) che individua
 $i_3 - i_5 - i_6 = 0$, pertanto

Quando la superficie di taglio riguarda un modo, la somma algebrica delle correnti uscenti e uscenti dal modo stesso è = 0.

Definiamo la legge in un altro modo: la somma delle correnti uscenti in un modo è uguale alla somma delle correnti uscenti dal modo stesso.

Ora studieremo il circuito di potenza:



LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI: KVL

Prendiamo una linea chiusa, ad esempio γ_1 e si muovano partendo dal nodo 4 per esempio in senso orario, nominando positive le tensioni che saranno concordi al verso di percorrenza, e negative le tensioni contrarie. Pertanto potremo scrivere:

$$U_1 - U_4 - U_2 = 0$$

↑ ↑ ↑
concordi discordi

MAGLIA: successione ordinata di nodi che formano un cammino chiuso.

In generale possiamo scrivere la legge delle correnti come:

$$\sum_{\text{maglie}} U_k = 0$$

, somma delle tensioni in una maglia è = 0.

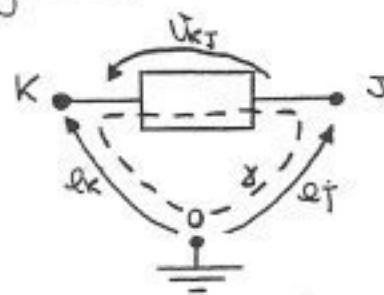
Facciamo un esempio, se andiamo a misurare:

$$U(\gamma_3) = U(\gamma_6), \text{ il quale è uguale a } U_{14} = \text{es. + potenziale del nodo 1}$$

Possiamo così notare che la tensione dipende solo dagli estremi della linea, non importa la strada che percorro per arrivare

POTENZIALE DI NODO: Se prendiamo il nodo 4 come nodo di riferimento (massa) e ad esso collego il morsetto - del voltmetro, se poi vado ad mettere sugli altri nodi il morsetto + del voltmetro, potrò così misurare il potenziale di ogni nodo (es. U_1, U_2, U_3, \dots).

Un altro modo per definire la legge di Kirchhoff delle tensioni è il seguente:

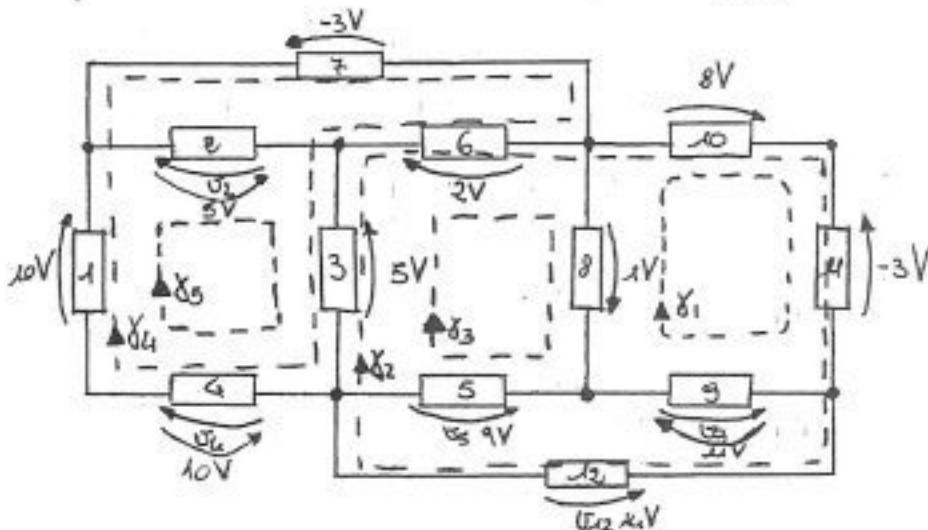


Una volta misurati i potenziali sui 2 nodi K e J possiamo determinare la tensione sul bipolo.

Se consideriamo la maglia γ la somma delle tensioni all'interno di essa deve essere 0, quindi:

$$I_K - I_J = U_{KJ}$$

ESERCIZIO: Dato il circuito di figura, determinare il maggior numero possibile di tensioni sui lati (applicativo KVL)



Per il momento, oltre ai valori di tensione dati, fissiamo il verso delle tensioni incognite ($U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}$) arbitrariamente.

Poi ci muoveremo sulle maglie per trovare le tensioni e se ci risulteranno tensioni negative signif. che dobbiamo girare il verso delle tensioni imposte noi arbitrariamente (U_1, U_2, \dots):

→ determiniamo la tensione U_9 sulla maglia γ_1 :

$$-8V + 8V - 11 - U_9 = 0 \Rightarrow U_9 = -11V, \text{ devo girare il verso}$$

→ determiniamo la tensione U_{12} sulla maglia γ_2 :

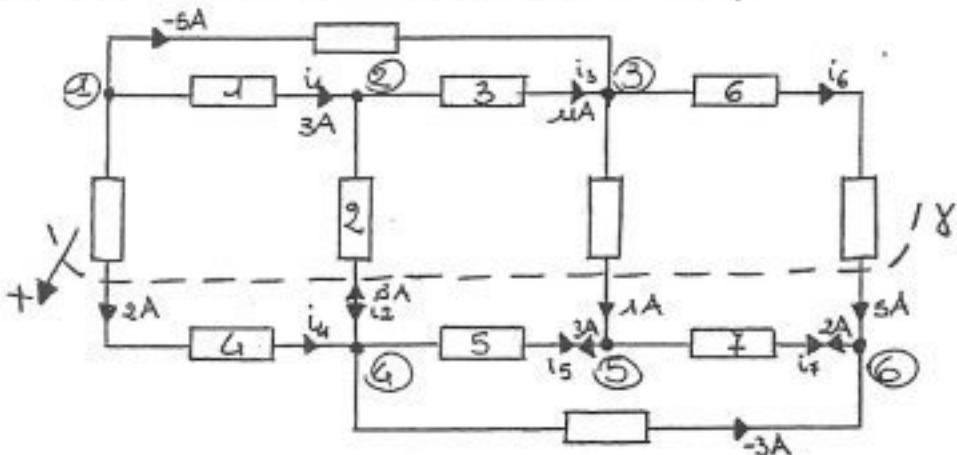
$$5V - 2V + 8V + 3V - U_{12} = 0 \Rightarrow U_{12} = 16V$$

- determiniamo la tensione U_3 sulla maglia γ_3 :
 $3V - 2V + 8V - U_3 = 0 \Rightarrow U_3 = 9V$
- determiniamo la tensione U_4 sulla maglia γ_4 :
 $10V + 3V + 2V - 5V + U_4 = 0 \Rightarrow U_4 = -10V$
- determiniamo la tensione U_2 sulla maglia γ_5 :
 $10V - U_2 - 5V - 10V = 0 \Rightarrow U_2 = -5V$

28/02/03

ESERCIZIO:

Ripartiamo dal circuito iniziale, ricavare il maggior numero possibile di correnti sui lati (applicativo KCL)



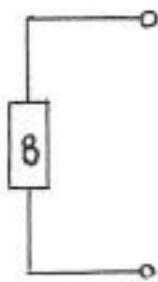
Per il momento, oltre ai valori delle correnti date fissiamo i valori delle correnti incognite ($i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$) arbitrariamente. Poi analizzeremo i nodi e le possibili superfici di taglio per determinare tutte le correnti.

- determiniamo i_3 dal nodo 3: sommo correnti entranti e le uguaglio alle correnti uscenti: $i_3 - 5A = 1A + 5A \Rightarrow i_3 = 11A$
- determiniamo i_2 della superficie di taglio γ_1 :
 $i_2 + 5A + 1A + 2A = 0 \Rightarrow i_2 = -8A$ (devo girare il verso)
- determiniamo i_7 dal nodo 6:
 $i_7 + 5A - 3A = 0 \Rightarrow i_7 = -2A$
- determiniamo i_5 dal nodo 5:
 $i_5 + 1A + 2A = 0 \Rightarrow i_5 = -3A$
- determino i_4 dal nodo 2:
 $i_4 + 8A = 11A \Rightarrow i_4 = 3A$

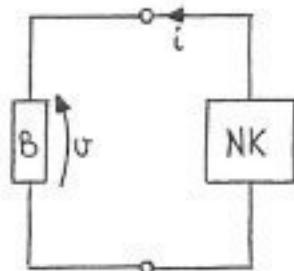
i_6 e i_1 erano già note perché già date le correnti sui quei lati.

LEGGI DI OHM

Essa rappresentava il legame costitutivo di un bipolo. Facciamo l'esempio del rilevamento della caratteristica del bipolo:

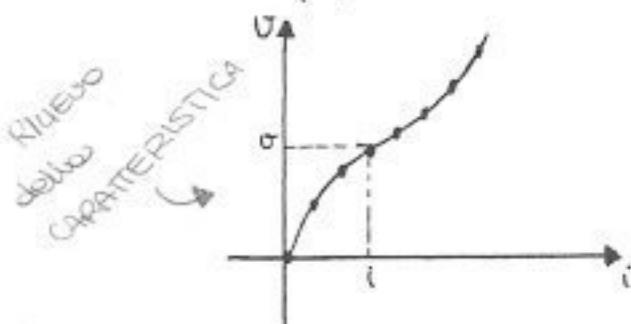


Quale legge intercorre tra v ed i ? Per scoprirlo dobbiamo creare un altro circuito, una nuova rete (NK) composta da più bipoli, che collegheremo a B:



Possiamo rilevare i diversi valori di i e v cambiando la rete NK (perimentalmente significa agire sulla manopola del generatore).

Variando la rete NK ottieniamo tanti punti sulla caratteristica che danno origine ad un "legge di punti", per esempio:



I valori di v ed i si muovono lungo la curva. Se variamo il valore di i e poi ritorniamo al valore di partenza, sul bipolo ritroviamo lo stesso valore di v entrambe le volte.

La curva dipende dal bipolo e non da cose esterne collegate, pertanto la curva è detta CARATTERISTICA DEL BIPOLO, la quale sarà descritta dall'equazione caratteristica (legge costitutiva):

$$f(v, i) = 0$$

la quale è detta anche Lega di Ohm del bipolo.

Analizziamo ora allora alcuni tipi di bipolo.

PRINCIPIO DI IDENTITÀ del BIPOLI: se rapporto fra la differenza di potenziale e corrente è uguale pendente da ciò che va accoppiato al bipolo (è una relazione caratteristica del bipolo)

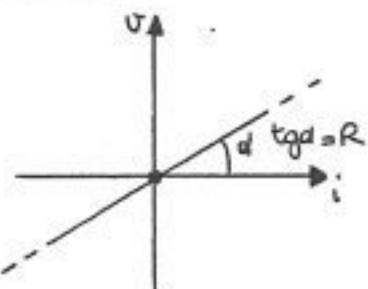
RESISTORE:



Il legame costitutivo è:
è la resistenza.

$$\sigma = R \cdot i$$

, in cui R



trovare si c'è legame di proporzionalità diretta. Questo non vale per $i \rightarrow 0$, ma in un certo intervallo della i .

UNITÀ DI MISURA: $\Omega = \text{ohm}$

- La sua caratteristica si dice che è un bipolo di tipo LINEARE perché c'è proporzionalità diretta tra V ed i .
- controllabilità: se osserviamo l'equazione caratteristica $V=R \cdot i$, i compare come grandezza indipendente, quindi " V " è in funzione di " i ". Perciò questo tipo di bipolo è CONTROLLABILE IN CORRENTE (cioè per ogni valore di corrente trovo una sola valore di tensione).

Ma è possibile anche comandarlo in Tensione?

$$i = \frac{1}{R} \cdot V$$

, quindi è anche controllabile in tensione

Definiamo così anche una seconda grandezza

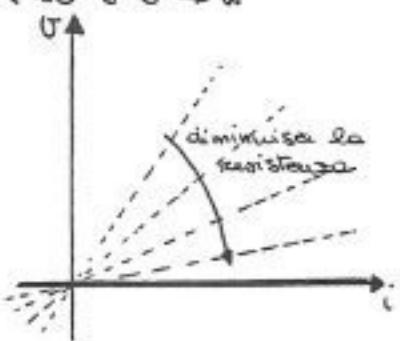
CONDUTTANZA: $\frac{1}{R} = G$, in cui G è la conduttanza.

In altre parole è l'inverso della resistenza

UNITÀ DI MISURA: $\Omega^{-1} = \text{ohm}^{-1}$ oppure $S = \text{siemens}$

CASI LIMITE DA CONSIDERARE:

- $R \rightarrow 0$ e $G \rightarrow \infty$



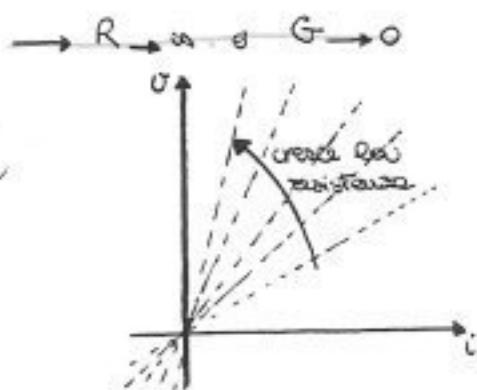
Al diminuire di R la caratteristica si muove verso l'asse x (i), quindi: $R=0$ significa che per qualunque val-

ore di corrente $V=0$. Questa è la definizione di CORTO CIRCUITO, il quale ha

equazione $V=0$, ed il suo simbolo è

$$\xrightarrow{i=0}$$

(i un falso)

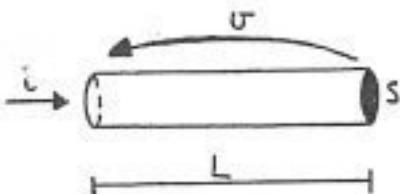


Al crescere di R la caratteristica si muove verso l'asse U (i). quindi:
 $G=0$ significa che per qualunque valore di tensione $i=0$. Questa è la definizione di CIRCUITO APERTO, e anche di ICCIATORE APERTO, il cui simbolo è:



Ma FISICAMENTE cosa è un resistore?

Il primo resistore scoperto era un filo metallico, con sezione costante S :



Ohm scoprì che c'è legge di proporzionalità $U=R \cdot i$, dove R viene meglio descritta come:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

RESISTIVITÀ: ρ = attitudine del materiale a far passare cariche elettriche (dipende dalla struttura del materiale).

UNITÀ DI MISURA: $\Omega \cdot m$

ESEMPIO: Determinare R dati:

$\rho_{Au} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, bassa resistività, ottimo conduttore.
 $L = 10 \text{ m}$; $S = 10^{-8} \text{ m}^2$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot \frac{10 \text{ m}}{10^{-8} \text{ m}^2} = 17 \Omega$$

Se vogliamo riscrivere l'equazione caratteristica del resistore:

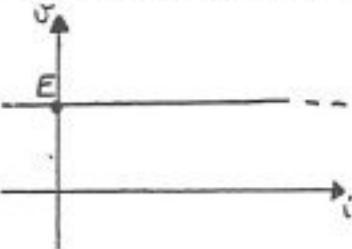
$U = R \cdot i$, cioè $U - R \cdot i = 0$ ci siamo così riportati nella forma semplice:

$$f(U, i) = 0$$

GENERATORE DI TENSIONE (ideale):



Se leggono costitutivo è:
 $U = E + i \cdot 0$ (positivo o negativo)
 E è un numero reale, suo valore assegnato.



$$U = E$$

in cui

Anche in questo caso va ad infinito, ma "vive" solo in un intervallo di corrente.

Dalle caratteristiche possiamo notare che per qualunque valore di "i" la tensione "U" resta fissa al valore E. È per questo motivo che viene detto anche GENERATORE INDEPENDENTE DI TENSIONE.

→ controllabilità: possiamo dire che sono i CONTROLLABILI IN CORRENTE,

perché:

$$U = E + i \cdot 0$$

questo non mi cambia E ma ogni valore di "i" corrisponde a un valore di U

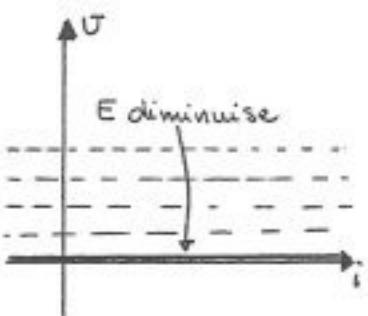
possiamo anche dire che non è comandabile in tensione, perché mi viene impossibile ricavare dalla formula di U: $i = \dots$ non so.

Il significato fisico è la BATTERIA, e questo è il modello del 1° ordine.

AUMENTARE

CASO LIMITE DA CONSIDERARE:

→ $E = 0$



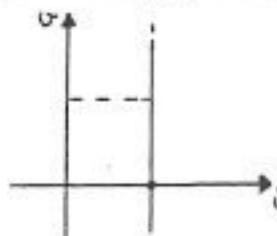
$E = 0$ significa che speguo il generatore, e le caratteristiche che ottengono è pari a quella di un corto circuito. Quindi:

quando speguo un generatore (tensione) equivale ad un corto circuito.

GENERATORE DI CORRENTE (ideale):



Il legame costitutivo è: $i = I_s$ in cui I_s è un numero reale, un valore assegnato.



SIGNIFICATO FISICO:

Sono dispositivi come i Transistori (mosfet) [Microelettronica]

Dalle caratteristiche possiamo notare che per qualunque valore di "v" la corrente "i" resta fissa al valore I_s . È per questo motivo che viene detto anche GENERATORE INDEPENDEnte DI CORRENTE.

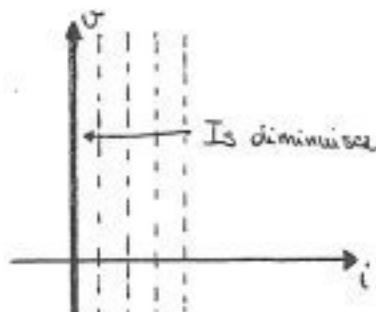
→ controllabilità: allora in questo caso è CONTROLLABILE IN TENSIONE

$$i = I_s + v \cdot 0 \quad \text{ma non controllabile in corrente.}$$

▲ TENSIONE

CASO LIMITE DA CONSIDERARE:

$$\rightarrow I_s = 0$$



$I_s = 0$ significa che spezzo il generatore, e le caratteristiche che ottengo sono pari a quelle di un circuito aperto.

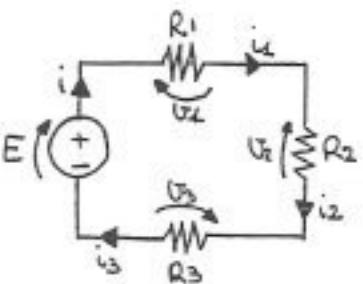
Quindi:

quando spezzo un generatore esso equivale ad un circuito aperto.

Ora faremo qualche esempio di circuito.

ANALISI DI UN CIRCUITO

Prendiamo un circuito e applichiamo le leggi viste finora.



Questo tipo di collegamento, in cui tutti i resistori sono percorsi dalla stessa corrente, è detto COLLEGAMENTO SERIE.

Dobbiamo determinare le grandezze elettriche del circuito, come procede?

Per prima cosa individuiamo sui bipoli i moni e i versi delle tensioni e delle correnti. Ora possiamo scrivere le equazioni con le leggi di Kirchhoff e Ohm.

→ KCL

$i = i_1 = i_2 = i_3$, tutte le correnti nei bipoli sono funzione di i , e sono proprio i .
1° PASSO

→ KVL (in questo caso solo una poiché il circuito è di una maglia)
 $E = U_1 + U_2 + U_3$ } 3° PASSO

→ legge di Ohm per ogni resistore (abbiamo utilizzato convenzione utile)

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 \cdot i_1 = R_1 \cdot i \\ U_2 &= R_2 \cdot i_2 = R_2 \cdot i \\ U_3 &= R_3 \cdot i_3 = R_3 \cdot i \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 2^{\circ} \text{ PASSO}$$

METODO PER ESEGUIRE L'ANALISI DI UN CIRCUITO:

→ I° PASSO: devo individuare un numero limitato di correnti e di tensioni che assumo come incognite della rete. Debono essere poche, ma soprattutto devono essere tra di loro indipendenti e devono essere un insieme completo, cioè se conoscessi queste variabili dovrà essere in grado di determinare tutte le altre variabili dello stesso tipo.

Fissiamo per esempio queste incognite: i .

→ II° PASSO: fissate le incognite, usiamo le leggi di Ohm per legare alle altre variabili: ($V = R \cdot i$)

→ III° PASSO: Utilizzo le leggi che riuniscono : se nel primo passo abbiamo utilizzato la KCL ora utilizziamo la KVL, e viceversa

Mettemo in otto questo metodo nell'esempio del circuito serie visto prima :

- Per primo passo scriviamo le correnti in funzione di i
- Per secondo passo scriviamo le leggi di Ohm
- Per terzo passo utilizziamo la KVL

$$E = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + R_3 \cdot i$$

$$= i (R_1 + R_2 + R_3)$$

CIRCUITO: entità
Topologica

ESEMPIO NUMERICO:

○ $E = 8 \text{ V}$ $R_1 = R_2 = 10 \text{ S}\Omega$? i
 $R_3 = 20 \text{ S}\Omega$

$$8 \text{ V} = i \cdot (10 + 10 + 20)$$

$$8 \text{ V} = i \cdot 40 \Rightarrow i = \frac{8}{40} = 0,2 \text{ A}$$

Proviamo ora a scrivere in forma letterale quello che abbiamo ottenuto :

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

PARTITORE DI TENSIONE:

Se vogliamo trovare la tensione ad esempio sul resistore R_1 :

$$U_1 = i \cdot R_1 = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

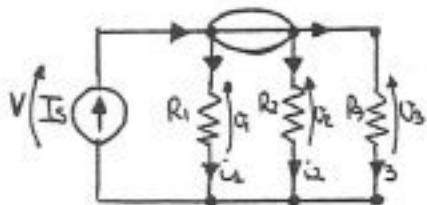
In generale : per trovare la generica U_k sul generico resistore R_k dobbiamo fare :

$$U_k = E \cdot \frac{R_k}{\sum_n R_n}$$

Partitore di tensione. Essendo applicato su un insieme di resistenze collegate in serie.

- La generica tensione U_k si ottiene moltiplicando E per la resistenza sulla quale si vuole calcolare la tensione divisa dal rapporto di tutte le resistenze in serie -

Prendiamo ora un esempio di altro tipo di circuito:



Questo collegamento, in cui le 3 resistenze sono sottoposte alla stessa tensione e le 3 correnti i_1, i_2, i_3 si sommano per dare la corrente totale, è detto COLLEGAMENTO PARALLELO.

Rispetto al primo, la variabile che si ripete su tutti i bipoli è la tensione. Se prendiamo come maglie una qualsiasi, facendo KVL si ottiene che:

$V = V_1 = V_2 = V_3$, pertanto ci basta conoscere V e poi possiamo avere a conoscenza di tutte le altre. Se poi consideriamo la KCL applicata alla superficie cernierata in rosso, possiamo dire che la I_s che entra nella superficie è uguale alla somma delle i che escono dalla superficie. Cioè:

$$I_s = i_1 + i_2 + i_3$$

Quindi possiamo riseguire il metodo utilizzato prima:

→ I° PASSO: l'incognita è V , e con la KVL posso scrivere:

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

→ II° PASSO: con la legge di Ohm sfrutto la controllabilità in tensione del resistore:

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right) \cdot V_1 \Rightarrow \frac{1}{R_1} \cdot V$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2}\right) \cdot V_2 \Rightarrow \frac{1}{R_2} \cdot V$$

$$i_3 = \left(\frac{1}{R_3}\right) \cdot V_3 \Rightarrow \frac{1}{R_3} \cdot V$$

→ III° PASSO: grazie alla KCL, $I_s = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot V$

$$\text{e quindi: } V = I_s \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

PARTITORE DI CORRENTE:

Se vogliamo trovare per esempio la i_1 : $i_1 = V \cdot \frac{1}{R_1} \Rightarrow i_1 = I_s \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

In generale:

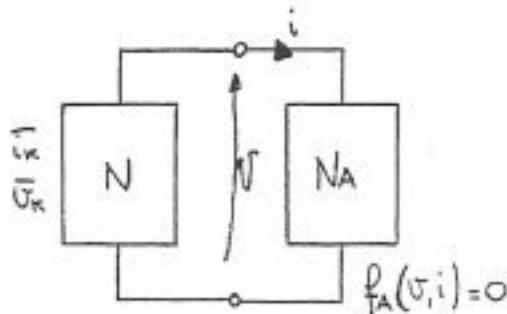
$i_k = I_s \cdot \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_i}}$
--

Partitore di Corrente - Applicato ad un numero di resistenze in parallelo. La generica i_k si ottiene moltiplicando I_s per la conduttanza k diviso la somma di tutte le condutture del par-

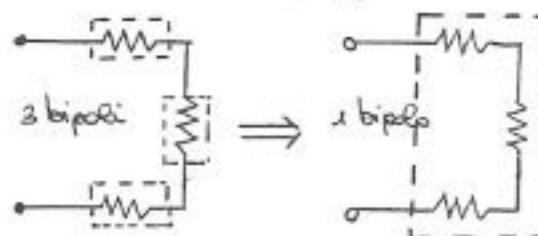
EQUIVALENZA TRA I BIPOLI

Vediamo un altro modo per risolvere i circuiti.

Abbiamo due reti di bipoli collegate:

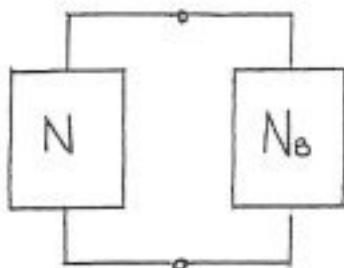


Aggregando tra di loro bipoli, possiamo vedere un nuovo bipolo con 2 magelli:



Supponiamo di aver fatto l'analisi e di aver trovato \bar{U}_R e \bar{i}_R .

Ora supponiamo che NA sia composto da tanti componenti. Quindi rifacciamo la rete completa sostituendo NA con un'altra rete:



Ma come deve essere fatta la rete NB affinché in N si riavvi gli stessi \bar{U}_R e \bar{i}_R ?

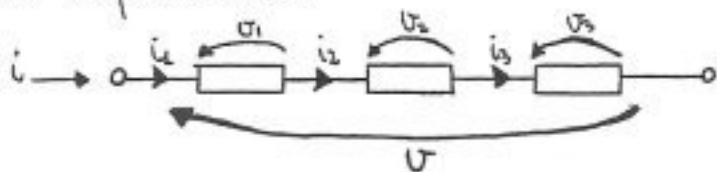
$f_B(V, i) = 0$ deve coincidere con f_A .

Se $f_B = f_A$ allora i due circuiti hanno la stessa soluzione.

E allora si dice che NB è equivalente ad NA, perché le due reti, viste dall'esterno, hanno la stessa caratteristica.

COLLEGAMENTO SERIE

Dati più bipoli collegati in serie, vogliamo determinare un bipolo equivalente.



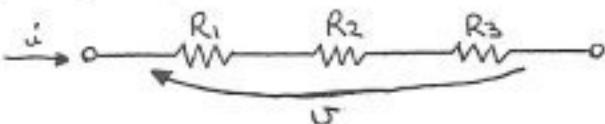
Supponiamo ogni bipolo controllabile in corrente, cioè possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U_1 &= f_1(i_1) \\ U_2 &= f_2(i_2) \\ U_3 &= f_3(i_3) \end{aligned}$$

Allora:

$$U = f_1(i) + f_2(i) + f_3(i)$$

Nell'esempio pratico di 3 resistori:



$$U_1 = R_1 \cdot i_1 = R_1 \cdot i$$

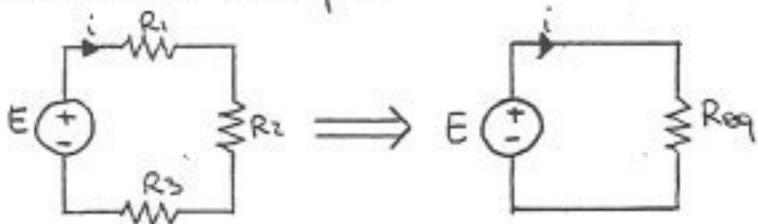
$$U_2 = R_2 \cdot i_2 = R_2 \cdot i$$

$$U_3 = R_3 \cdot i_3 = R_3 \cdot i$$

Quindi: $U = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot i$. Pertanto l'equazione costituisce ancora del tipo $U = R \cdot i$, in cui R è la somma di 3 resistenze collegate in serie. Si può quindi sostituire con:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$$

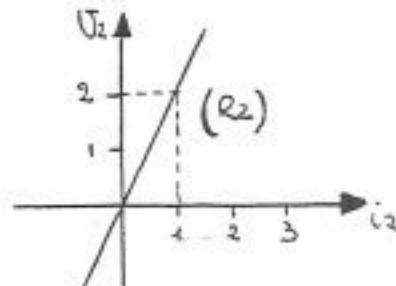
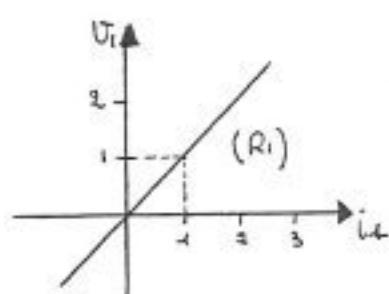
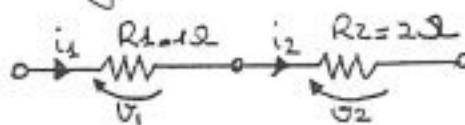
Facciamo un esempio:



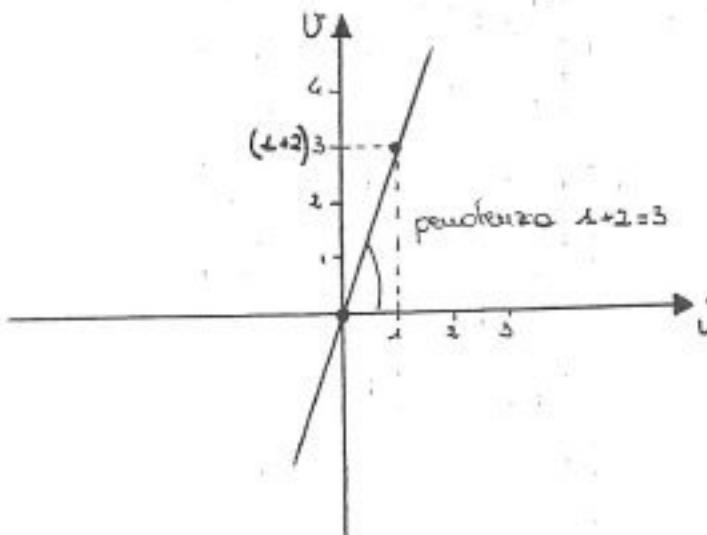
$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \implies i = \frac{E}{R_{\text{eq}}}$$

Anche se facciamo sostituzione, lo i resterà uguale in entrambi i casi.

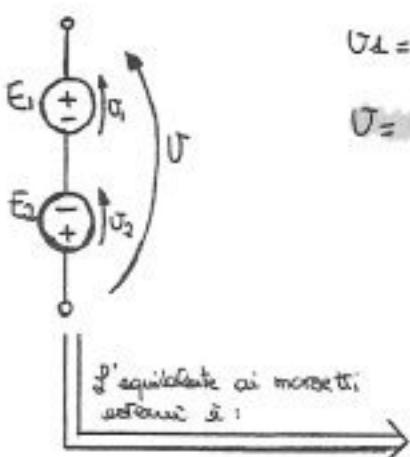
Ma GRAFICAMENTE, cosa significa fare la serie tra due resistori? lo esplichiamo prendendo ad esempio 2 resistori con valore assegnato:



Comporre in serie le due caratteristiche, significa ottenere una sola nuova caratteristica. Per disegnarla dobbiamo fare una somma rispetto alla tensione delle due caratteristiche cioè, per ogni valore di corrente, sommo il valore delle tensioni e ottengo il valore del punto risultante. Possiamo notare anche che la pendenza della nuova retta sarà la somma delle pendenze delle 2 caratteristiche separate. Faccio:

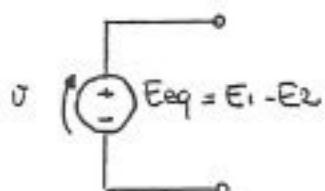


→ Collegamento in serie di 2 generatori di tensione

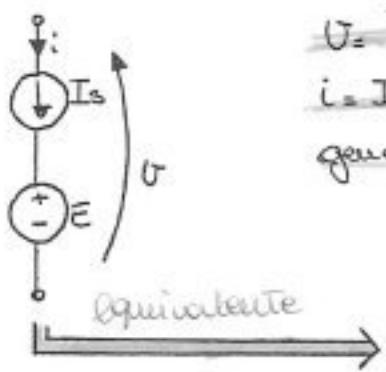


$$U_1 = E_1 \quad U_2 = -E_2$$

$U = E_1 - E_2$, quindi il risultato è ancora un valore di tensione, perciò il risultato è ancora un generatore di tensione.

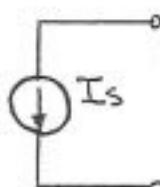


→ Collegamento in serie di un generatore di tensione e un generatore di corrente

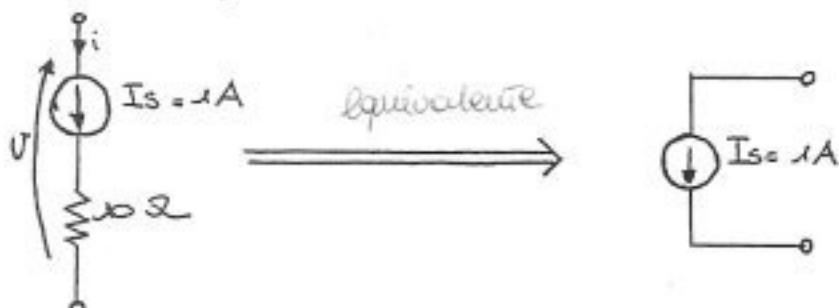


$$U = ? \text{ indeterminato}$$

$i = Is$ (fissata), perciò l'equivalente è un generatore di corrente che vale Is :



E questo vale per qualunque bipolo venga collegato in serie ad un generatore di corrente, ad esempio:



Il generatore di corrente non è controllabile in corrente, cioè ad un valore di corrente non posso far corrispondere un valore di tensione.

$$i = -Is$$

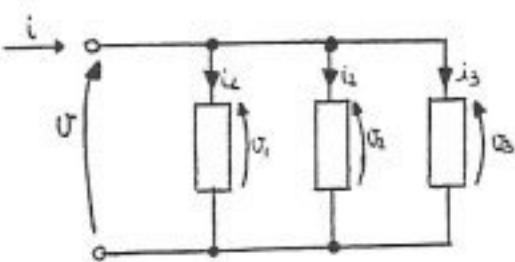
La tensione totale U è indeterminata.



$Is1 \neq Is2$ non è verificata la legge di Kirchhoff delle correnti

Kirchhoff delle correnti è quindi ho scritto all'interno che non ha alcun significato fisico e non ha alcuna

COLLEGAMENTO PARALLELO



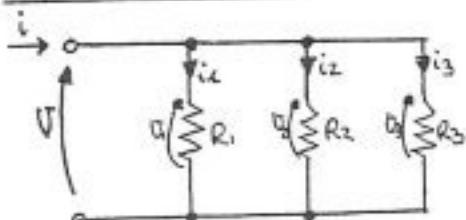
Supponiamo ogni elemento controllato in tensione, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1 \cdot (U_1) \\ i_2 &= g_2 \cdot (U_2) = U \\ i_3 &= g_3 \cdot (U_3) \end{aligned}$$

→ Allora:

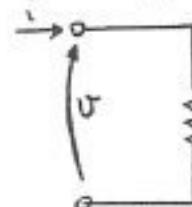
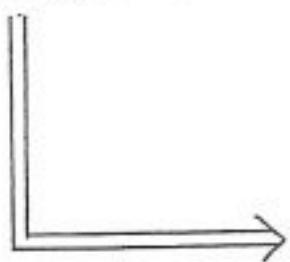
$$i = g_1 \cdot (U) + g_2 \cdot (U) + g_3 \cdot (U)$$

→ CASO DI 3 RESISTORI COLLEGATI IN PARALLELO



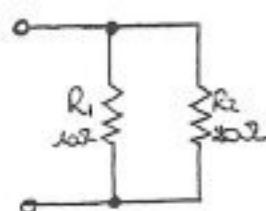
$$i_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U \quad i_2 = \frac{1}{R_2} \cdot U \quad i_3 = \frac{1}{R_3} \cdot U$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{R_1} \cdot U + \frac{1}{R_2} \cdot U + \frac{1}{R_3} \cdot U \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot U \end{aligned}$$

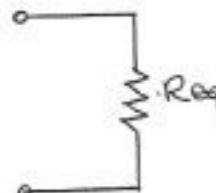


$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

ESEMPIO:



→ equivalente
a:



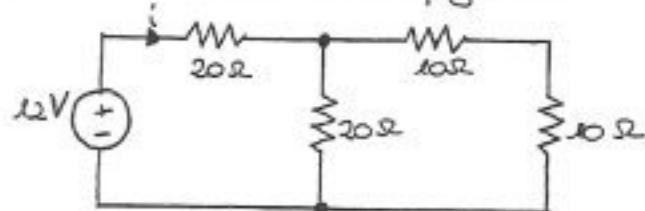
$$\frac{1}{Req} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ma nel caso di 2 resistori in parallelo, è SOLO in questo caso, così
→ viene scrivere: $\frac{1}{Req} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$, quindi $Req = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ Solo per 2 resistori

Nell'esempio: $Req = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = \frac{200}{30} = 6,6 \Omega$

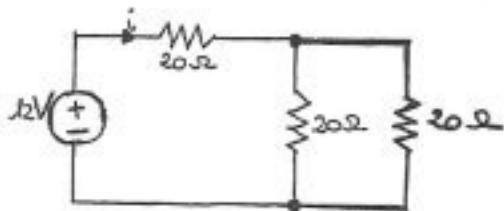
ESERCIZIO:

Risolvere le reti date in figura.



Per risolvere la rete troviamo gli equivalenti serie-parallelo:

- le due resistenze da $10\ \Omega$ sono collegate in serie, quindi ottieniamo una unica resistenza data dalla somma delle due: $10\ \Omega + 10\ \Omega = 20\ \Omega$



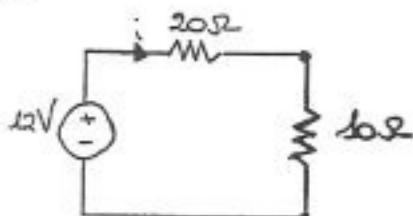
- Ora le due resistenze da $20\ \Omega$ sono in parallelo, quindi otteniamo una unica resistenza data da:

$$\frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{20 \cdot 20}{20+20} = \frac{400}{40} = 10\ \Omega$$

Notiamo così che il parallelo tra 2 resistenze di ugual valore, dà una resistenza equivalente che ha valore metà del valore di ciascuna delle 2 resistenze:

$$\frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

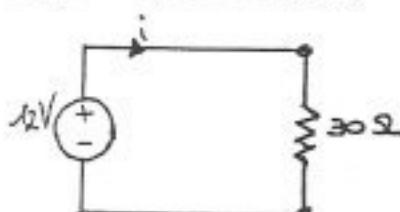
Quindi:



$$\frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{20 \cdot 20}{20+20} = 10\ \Omega$$

$$\frac{R}{2} = \frac{20}{2} = 10\ \Omega$$

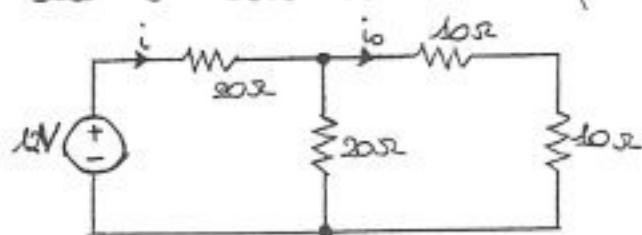
- Ora le due resistenze sono percorse dalla stessa corrente "i", quindi sono in serie, quindi ottieniamo una unica resistenza data da: $R_{eq} + R_{10} = 20 + 10 = 30\ \Omega$



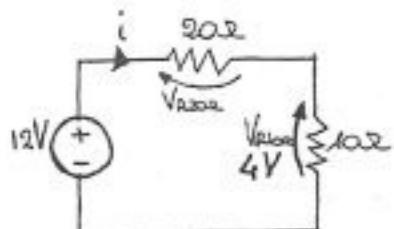
A questo punto possiamo dire che particolarmente la rete è risolta, infatti tramite le leggi di Ohm possiamo calcolare il valore di "i":

$$i = \frac{V}{R} = \frac{12V}{30\Omega} = 0,4A$$

Dando per scontato il valore di $i = 0,4A$, ora possiamo ad andare praticamente a rettificare ed andiamo a determinare la "io" del circuito di potenza:



Portiamo allora dal circuito:

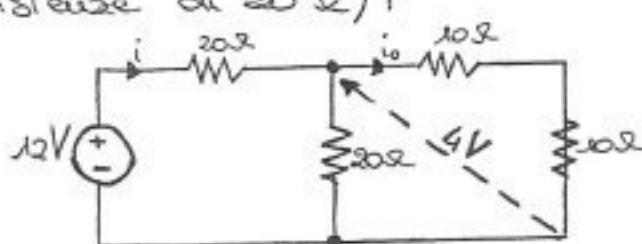


Conoscendo la corrente "i" possiamo calcolare le tensioni sui due resistori:

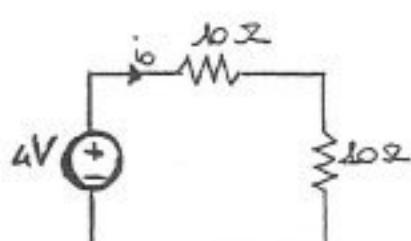
$$V_{20\Omega} = R \cdot i = 20\Omega \cdot 0,4A = 8V$$

$$V_{10\Omega} = R \cdot i = 10\Omega \cdot 0,4A = 4V$$

Allargando così il circuito possiamo scrivere che (dato che la resistenza da 10Ω era data dal parallelo di due resistenze di 20Ω):

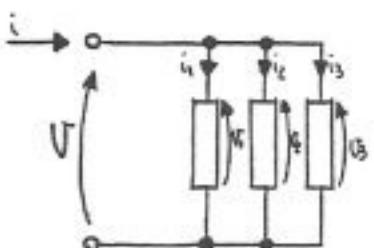


Notiamo che i $4V$ cadono su i due rami in parallelo e che la "io" circola su uno di questi rami, così possiam scrivere



$$\text{Pertanto: } io = \frac{V}{R} = \frac{4V}{10\Omega} = 0,4A$$

Ed essendo le due resistenze in serie di ugual valore, possiamo anche dire che la caduta di tensione su ognuna di esse è pari $\frac{1}{2} \cdot 4V$, cioè $2V$ su ogni resistenza (verificabile col portatore di tensione)

RIPASSO LEZIONE PRECEDENTECOLEGAMENTO PARALLELO:

Nel collegamento parallelo i bipoli sono apposti alla stessa tensione, per questo motivo sono detti controllabili su tensione

$$i_1 = g_1 \cdot (U_1) \quad \backslash$$

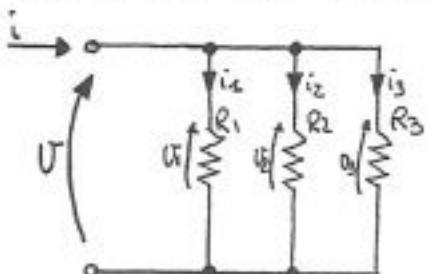
$$i_2 = g_2 \cdot (U_2) \quad - \quad U_1 = U_2 = U_3 = U$$

$$i_3 = g_3 \cdot (U_3) \quad /$$

$$i = g_1(U) + g_2(U) + g_3(U)$$

E questo visto è il caso generico.

Nel caso di 3 Resistori:



$$\text{ad esempio: } i_3 = \frac{1}{R_3} \cdot U_3$$

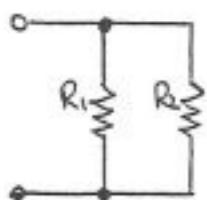
$$\text{quindi: } i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot U$$

Per tanto, nel caso di resistori in parallelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

, in poche parole sommo le conduttanze.

Nel caso particolare di 2 resistori in parallelo:



$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

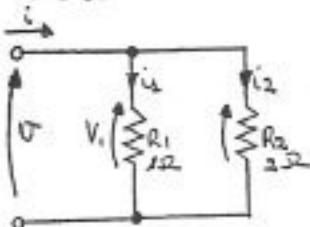
$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Tenendo presente che la R_{eq} è sempre minore della più piccola delle due resistori.

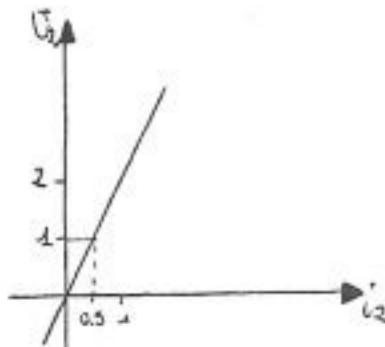
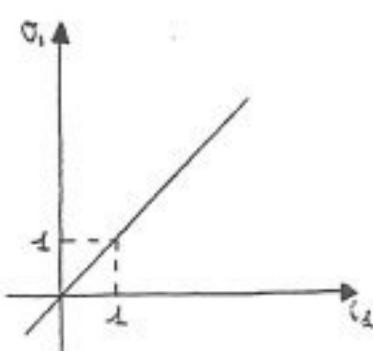
Ma GRAFICAMENTE cosa significa fare il parallelo?

COMPOSIZIONE GRAFICA DEL PARALLELO DI DUE RESISTORI:

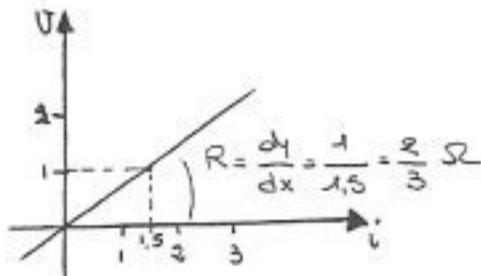
Prendiamo ad esempio due resistori di valore omogeneo:



Le due resistenze sono collegate in parallelo, in quanto sono sottoposte alla medesima tensione.



Comporre in parallelo le due caratteristiche significa ottenere una sola e nuova caratteristica: per disegnarla dobbiamo fare una somma rispetto alla corrente delle due caratteristiche. Cioè: per ogni valore di tensione, sommo i valori delle correnti e ottengo il valore del punto risultante. La pendenza della retta ottenuta è il nuovo valore corrispondente alla resistenza equivalente del parallelo delle due resistenze. Perciò:

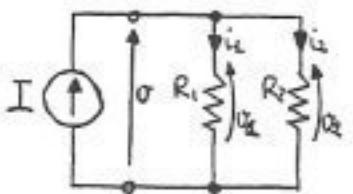


La resistenza equivalente risulta dunque $\frac{2}{3} S$, così come possiamo verificare.

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} S \quad (\text{la quale è minore sia di } R_1 \text{ che di } R_2)$$

Ma vogliamo ora calcolare anche i valori di i_1 e di i_2 .

E' per questo motivo che ora proteremo a collegare un generatore di corrente al parallelo delle resistenze, e vediamo cosa succede.



Del circuito vogliamo determinare i_1, i_2

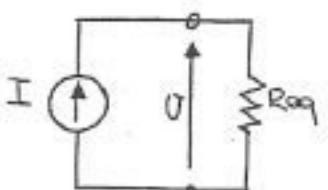
Per determinare i_1 e i_2 ci serviamo del partitore di corrente.

$$i_1 = \frac{U}{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

resistenza sul lato opposto
somma resistenze

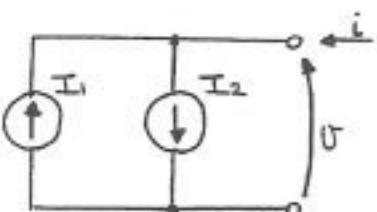
$$i_2 = \frac{U}{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Per determinare Σ siamo possiamo usare ciò che abbiamo detto prima:



$$U = I \cdot R_{\text{eq}} = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

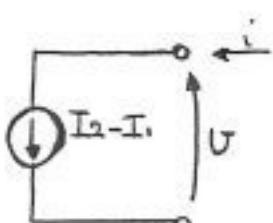
→ Circuito equivalente in parallelo di due generatori di corrente



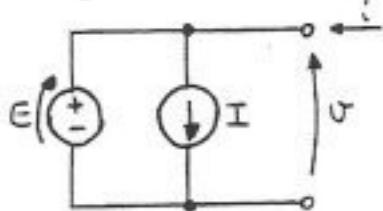
$$i = I_2 - I_1$$

(Questo deve delle KCL al nodo:
corr. usciti: $i + I_1 =$ correnti usciti I_2
Quindi: $i = I_2 - I_1$)

equivalente a:



→ Calcolare il parallelismo di un generatore di corrente e uno di tensione



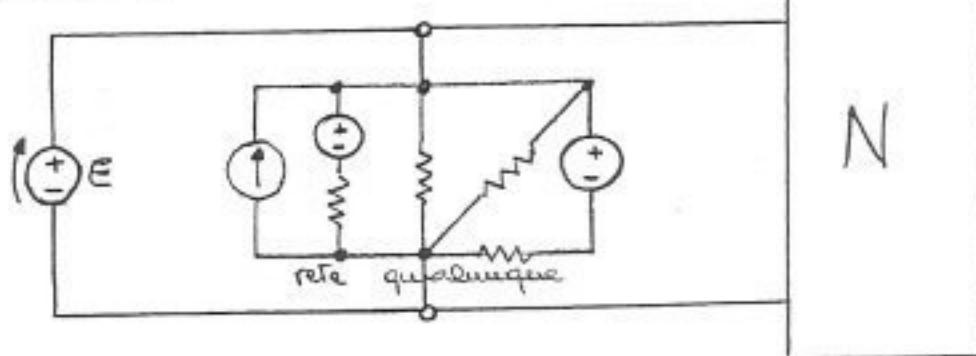
La tensione $U = E$, in quanto è impostata dal generatore di tensione, mentre non sappiamo che molla per quanto riguarda I . Quindi si equivale ad un generatore di tensione:

equivalente a:

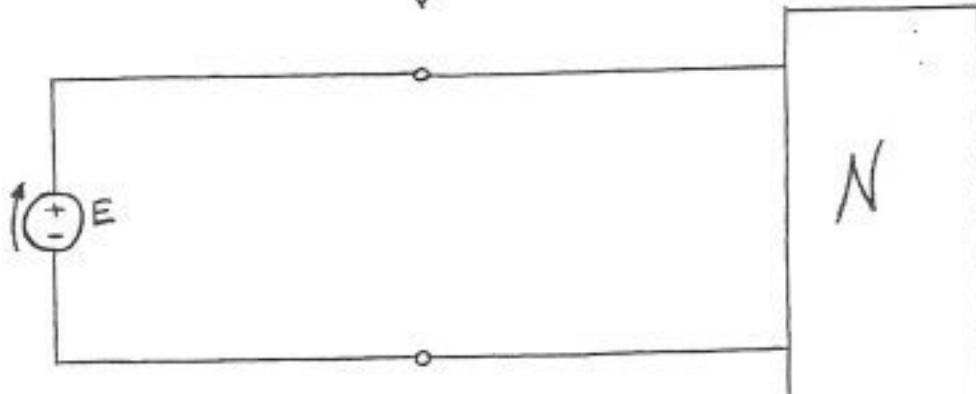


Rispetto alla cui sempre più
quanto maggiore la molla.

ESERCIZIO:



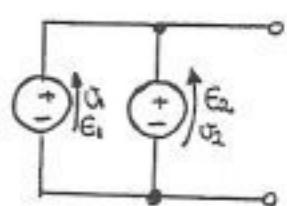
Per studiare la rete N , l'equivalente di tutte le reti precedenti è:



Questo perché sappiamo la tensione presente sui due morsetti ma non sappiamo determinare la corrente che circola.

DUE CASI A EUI PORRE ATTENZIONE:

→ I° CASO (parallelo)



Se E_1 ha valore diverso da E_2 , la KVL violata e questo circuito non ha soluzione. Quindi è un sistema impossibile.

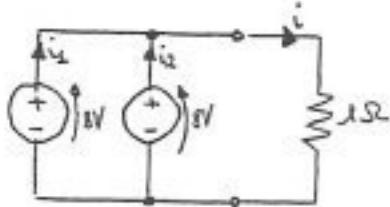
Nel caso invece in cui E_1 ha valore uguale a E_2 , allora il sistema è indeterminato (sul valore di corrente che circola).

Ricapitolando :

$$E_1 = E_2 \quad \text{INDETERMINATO}$$

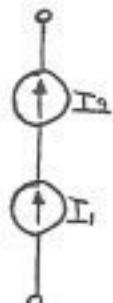
$$E_1 \neq E_2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

ESEMPIO:



Sappiamo che $i = \frac{U}{R} = \frac{8}{1} = 8A$, quindi sappiamo che $i_1 + i_2 = i = 8A$, ma non sappiamo il valore di escursioni di ente. Quindi non c'è modello fisico da cui trarre una soluzione matematica.

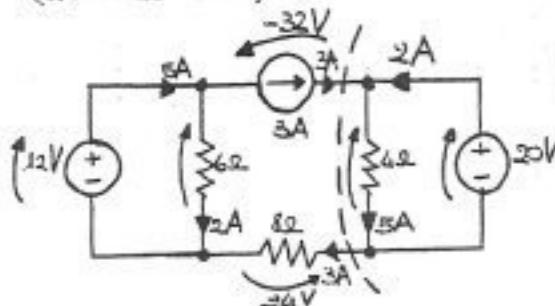
→ II° CASO (series)



$$I_1 \neq I_2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

$$I_1 = I_2 \quad \text{INDETERMINATO, non so determinare la tensione su ciascun generatore}$$

ESEMPIO: (esercizio 3.34)



Determinare tutte le tensioni e tutte le correnti della rete.

→ Lato con resistenza da 6 Ω

La tensione sul resistore è di 12 V (imposta ai nodi dal generatore). Allora determiniamo la corrente:

$$i = \frac{U}{R} = \frac{12V}{6\Omega} = 2A$$

→ Lato con resistenza da 4 Ω

La tensione sul resistore è di 20 V (imposta ai nodi dal generatore).

Allora determiniamo la corrente:

$$i = \frac{U}{R} = \frac{20}{4} = 5A$$

→ Lato con generatore da 20 V

Determiniamo la corrente tramite la KCL al nodo:

$$3A + i = 5A \Rightarrow i = 2A$$

→ Lato con resistenza da 8 Ω

Determiniamo la corrente del lato osservando la superficie di Taglio S. Sappiamo che tante correnti entro nella superficie di Taglio S, tante ne deve uscire. Quindi se entriano 3A, ne dovranno uscire altrettanti: $i = 3A$.

A questo punto possiamo determinare la tensione:

$$U = R \cdot i = 8\Omega \cdot 3A = 24V$$

→ Lato con generatore da 12 V

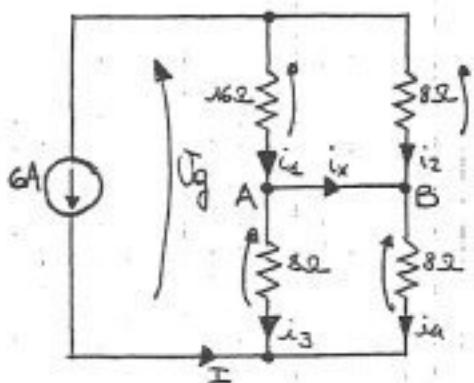
Conoscendo la tensione, determiniamo ora le correnti con la KCL al nodo: $i = 3A + 2A \Rightarrow i = 5A$

→ Lato con generatore da 3 A

Determiniamo la tensione sul generatore di corrente scegliendo ad esempio di applicare la KVL ad esempio alle maglie più esterne della rete:

$$U + 20 + 24 - 12 = 0 \Rightarrow U = -20 - 24 + 12 = -32V$$

ESEMPIO:



Determinare la i_x e la U_g .

Primo di tutto facciamo la considerazione che i resistori sono paralleli a due a due. Anche se magari su prima cosa non lo potrete sembrare. Infatti se due nodi sono collegati tra loro tramite un cono-circuito, possiamo fondere i due nodi in uno unico, e in queste esempio allora si vedrebbe bene come le resistenze sono in parallelo a due a due.

Torniamo all'esercizio.

Essendo le resistenze in parallelo e conoscendo la I del generatore, possiamo applicare le formule del portatore di corrente per determinare le i sui vari lati (i_1, i_2, i_3, i_4).

$$i_1 = (-6A) \cdot \frac{8}{16+8} = -2A$$

$$i_2 = (-6A) \cdot \frac{16}{16+8} = -4A$$

$$i_3 = (-6A) \cdot \frac{8}{8+8} = -3A$$

$$i_4 = (-6A) \cdot \frac{8}{8+8} = -3A$$

orientate in senso opposto a quello che dovrebbero essere.

Ora per trovare i_x applichiamo le KCL al nodo A e al nodo B:

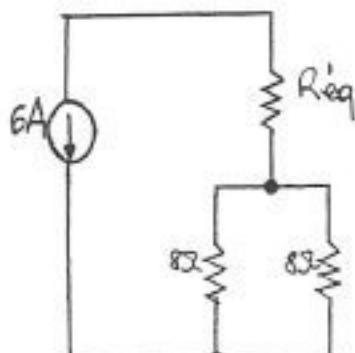
modo A: $i_x + i_3 = i_1 \Rightarrow i_x = i_1 - i_3 \Rightarrow \boxed{i_x} = -2 - (-3) = \boxed{1A}$, verifichiamo:

nodo B: $i_x + i_2 = i_4 \Rightarrow i_x = i_4 - i_2 \Rightarrow i_x = -3 - (-4) = 1A$. GIUSTO!

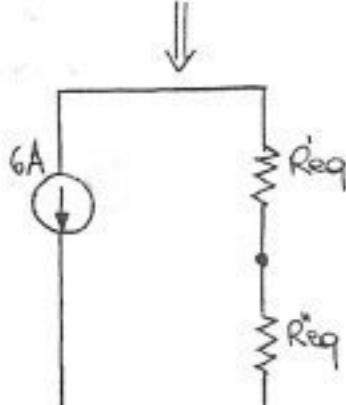
Per trovare U_g : $\boxed{U_g} = 16\Omega \cdot i_1 + 8\Omega \cdot i_3 = -32 - 24 = \boxed{-56V}$

$\boxed{VR_{16\Omega}}$ $\boxed{VR_{8\Omega}}$

Avevamo potuto scegliere una linea differente per risolvere l'esercizio cioè studiando man mano i circuiti equivalenti fino a semplificare al massimo la rete:

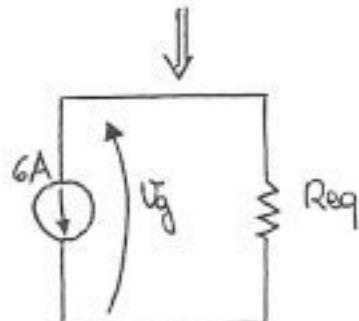


$$R_{eq} = (16 \parallel 8) = \frac{16 \cdot 8}{16 + 8} = \frac{16}{3} \Omega$$



$$R_{eq} = (8 \parallel 8) = 4 \Omega$$

↑ la resist. equiv. del parallelo di due res. uguali ha valore $\frac{r}{2}$.

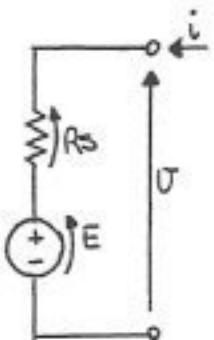


$$R_{eq} = R'_{eq} + R''_{eq} = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3} \Omega$$

Per determinare V_g questa strada è forse la più semplice, infatti: $V_g = (-6) \cdot \frac{28}{3} = -56 \text{ V}$ (stesso risultato di prima).

Ma su questo circuito non sappiamo più determinare i_x , non sappiamo più quale sia.

TRASFORMAZIONE GENERATORE IDEALE TENSIONE → GENERATORE IDEALE CORRENTE

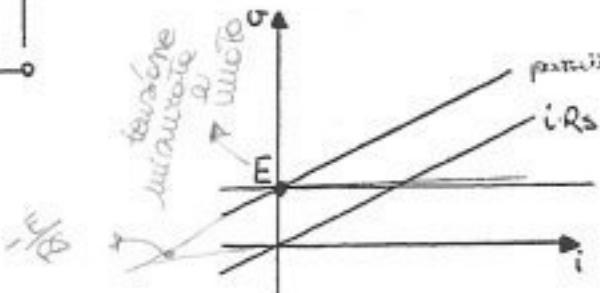


Se imponiamo "i" cappiamo trovare "U":

$$U = i \cdot R_s + E$$

e così ho ottenuto ANALITICAMENTE la sua caratteristica (cioè ho ottenuto l'equazione di una retta che non passa per l'origine).

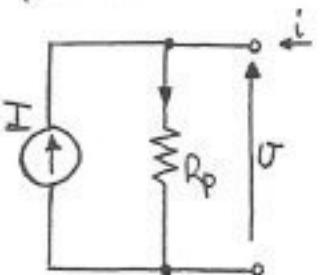
GRAFICAMENTE:



$$U = iR_s + E$$

(corrisponde in realtà alla sua caratteristica)

Ora eschiammo l'analogo generatore di corrente con una resistenza in parallelo:

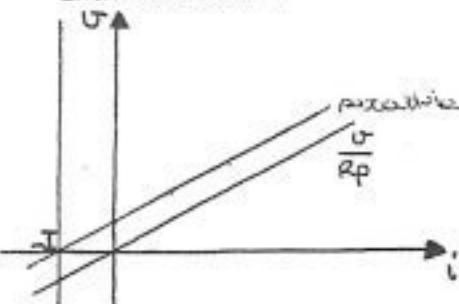


Se imponiamo "U" cappiamo trovare "i":

$$i = U \cdot \frac{1}{R_p} - I$$

anche qui, analiticamente, ho ottenuto una equazione che corrisponde ad una retta non passante per l'origine.

GRAFICAMENTE:



$$i = \frac{U}{R_p} - I$$

(corrisponde in parallelo alla sua caratteristica)

Se sceglieremo opportunamente i parametri, possiamo rendere uguali le due caratteristiche. Né che vuol dire:

$$R_s = R_p \quad (\text{in modo che le pendenze delle rette siano le stesse}).$$

Poi dobbiamo legare E ad I : Partendo da $U = i \cdot R_s + E$,

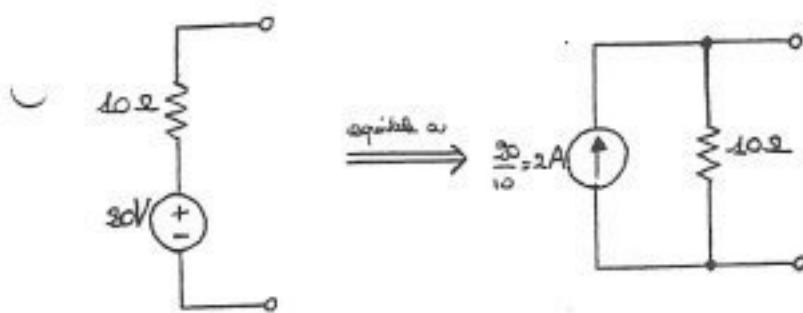
$$i = \frac{U-E}{R_s} = U \cdot \frac{1}{R_s} - \frac{E}{R_s}, \text{ ed ora possiamo confrontare questa}$$

con $i = U \cdot \frac{1}{R_p} - I$, ottenendo che:

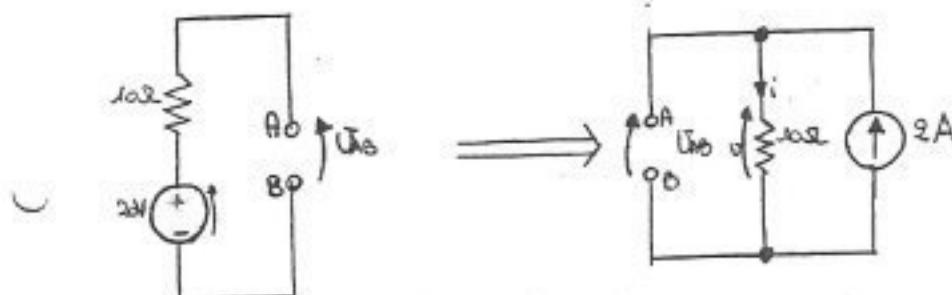
$$R_s = R_p$$

$$\frac{E}{R_s} = I$$

ESEMPIO: Ricavare l'equivalente di tipo parallelo delle rete:

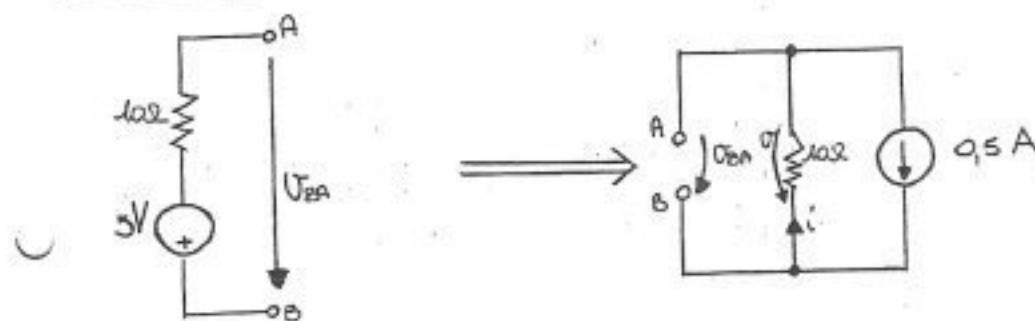


Per sapere come mettere i segni, proseguiamo a lasciare un circuito aperto:

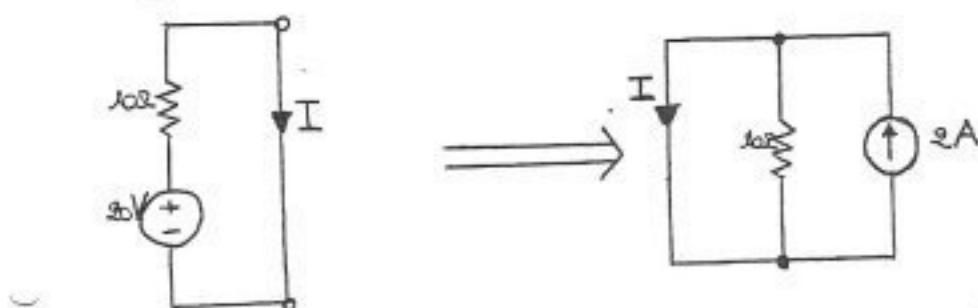


Se considero un aperto, collegato al bipolo, perché il bipolo sia equilibrato dovrò dare la stessa tensione su AB, quindi vedo il caso -

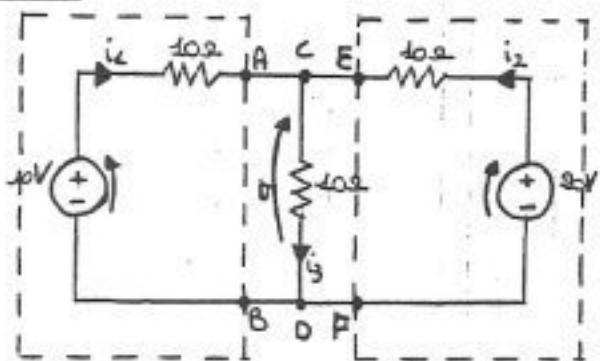
ESEMPIO:



Ottengo così gli stessi risultati se anche lasciare un circuito aperto collegassimo un corto-circuito, la corrente dovrà essere lo stesso: (stesso verso)

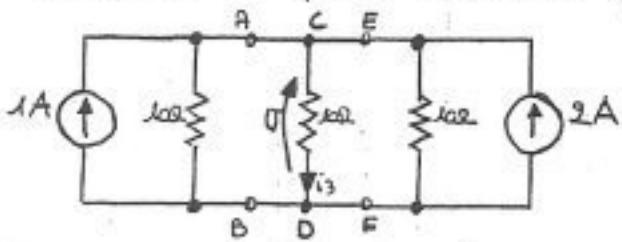


ESEMPIO:



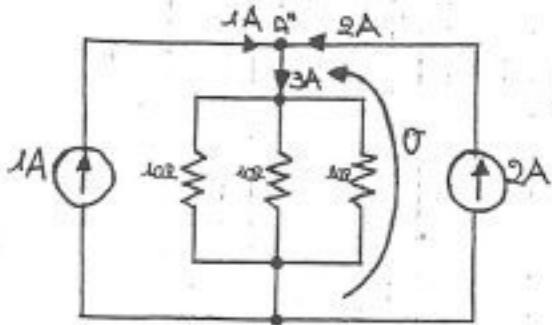
Determinare V_{CD} , i_1 , i_2 , i_3 .

8 resistori non sono né in serie né in parallelo, ma con le formule di equivalenza possiamo porle tutte in parallelo:



Posso ridurre V_{CD} su questo circuito che è lo stesso che trovai sul circuito d'origine, perché il ramo CD non è stato toccato dalle trasformazioni.

Ridisegniamo il circuito inserendo dei sotto-circuiti fittizi per vedere meglio:



$$KCL \text{ al nodo } A: 1A + 2A = 3A$$

$$R_{eq} = \frac{10}{3} \Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \Omega^{-1}$$

$$V_{CD} = 3A \cdot \frac{10}{3} \Omega = 10V$$

A questo punto possiamo tornare al circuito di partenza e trovare le correnti

→ calcoliamo i_1 dalla maglia "CDBAC": (KVL)

$$-V_{CD} + 10V = R \cdot i_1 \rightarrow -10 + 10 = 10 \cdot i_1 \rightarrow i_1 = 0A$$

→ calcoliamo i_2 dalla maglia "CEFDC": (KVL)

$$i_2 \cdot R - 10V + V_{CD} = 0 \rightarrow i_2 \cdot \frac{10-10}{10} = 0 \rightarrow i_2 = 1A$$

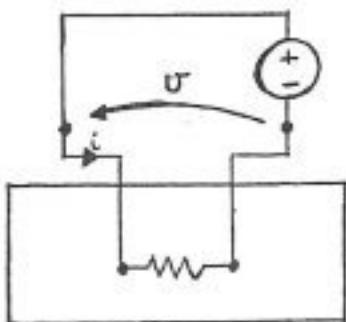
→ calcoliamo i_3 sul lato CD: (legge di Ohm)

$$i_3 = \frac{V_{CD}}{R} = \frac{10}{10} = 1A \rightarrow i_3 = 1A$$

Una volta determinate i_2 potremmo già dire che anche i_3 ha dello stesso valore, in quanto i_1 è uguale a zero, quindi i_2 e i_3 sono le stesse correnti.

POTENZA ELETTRICA

Per poter far funzionare un circuito elettrico necessitiamo di un qualcosa che produce lavoro (generatore). Il passaggio di corrente in un conduttore, produce il riscaldamento del conduttore stesso (effetto joule). Per definire la potenza, prendiamo un resistore, che quando lavora produce calore, si riscalda, perché trasforma la corrente in calore.



$$Q = L = K \cdot U \cdot i \cdot \Delta t$$

Δ = variazione di temperatura

Sto compiendo lavoro di tipo elettrico.

Poi però si è voluto eliminare K dalla formula, negliendo un'adeguata unità di misura.

Se prendiamo come unità di misura fondamentale quello della corrente (ampere), il "volt" lo possiamo poi determinare, in modo che K valga 1:

$$L = U \cdot i \cdot \Delta t$$

$$P = U \cdot i \quad \text{in condizioni stazionarie}$$

On base alla potenza possiamo distinguere tra bipoli che:

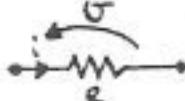
ASSORBONO POTENZA (o i è positivo, ecco x' delle condiz. utilizzatori)

ASSORBONO / DISSIPANO POTENZA

BIPOLI PASSIVI: quando in ogni condizione di funzionamento, siamo sicuri che $P = U \cdot i \geq 0$, cioè è in grado solo di assorbire ^{bambus} energia elettrica.

BIPOLI ATTIVI: $P = U \cdot i \geq 0$, e ciò dipende da cosa sono collegati

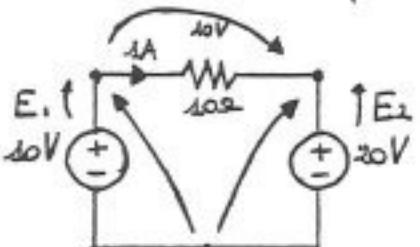
Portanto definiamo:



bipolo passivo, può solo assorbire potenza.

$$P = U \cdot i = i \cdot (i \cdot R) = i^2 \cdot R = U^2 \cdot \frac{i}{R} = \frac{U^2}{R}, \text{ sempre } \geq 0$$

Studiamo ora un esempio questo circuito:



$$P_{E_1} = 10 \cdot 1 = +10 \text{ W}, \text{ sta assorbiendo potenza (segno +)}$$

$$P_{E_2} = 20 \cdot (-1) = -20 \text{ W}, \text{ sta erogando potenza (segno -)}$$

Un generatore ideale quindi può EROGARE e ASSORBIRE potenza quindi fa parte dei componenti ATTIVI.

Ora calcoliamo la potenza assorbita dal resistore:

$$P = i^2 \cdot R = 1 \cdot 10 = 10 \text{ W}$$

Facciamo la somma algebrica delle 3 potenze ottenute:

$$+10 - 20 + 10 = 0$$

Generalizzando,

Dato un circuito di l lati e misurate i ed v di ciascun lato con la stessa convenzione, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^l (v_k \cdot i_k) = 0$$

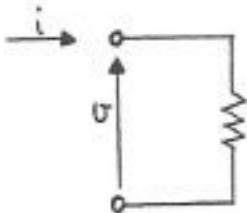
sommatoria delle potenze sui lati = 0.

Affinché un circuito funzioni, ci deve essere almeno un bipolo che eroga potenza (cioè la sua potenza è un numero negativo).

GENERATORI PILOTATI

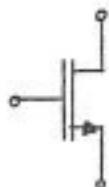
21/03/03

Finora abbiamo visto e utilizzato bipoli del tipo:



e abbiamo imparato a trarre anche il legame tra "i" e "v", detto legame costitutivo e anche legame locale.

Esistono elementi fisici (come i MOSFET), che sono dispositivi così come un Tripolo, cioè:

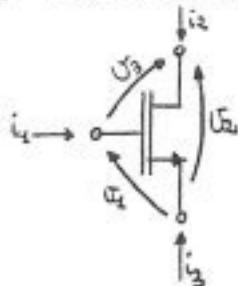


MOS - FET

Metallo Ossido Conduttore

Transistor ad Effetto di Campo

Notiamo che abbiamo Tre morsetti, quindi Tre correnti che possono misurare:



Applicando al Tripolo le KCL, otteniamo che solo 2 correnti sono indipendenti. Quindi se conosciamo i_1 e i_2 sappiamo anche

determinare i_3 come $i_3 = i_1 + i_2$.

In generale, due correnti caratterizzano un Tripolo.

Per quanto riguarda le tensioni, anche esse solitamente due sono tra di loro indipendenti, perciò: $V_3 = V_G - V_D$

In generale, due tensioni caratterizzano un Tripolo.

Pertanto le 4 variabili indipendenti sono: i_1, i_2, V_G, V_D

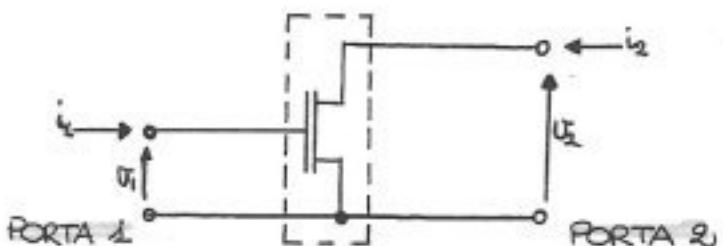
Ai morsetti esterni, le leggi "costitutive" sono due. Le leggi che consideriamo ora non valgono sempre, ma per questo caso fanno bene:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g \cdot V_D \end{cases}$$

(in una particolare regione di funzionamento).

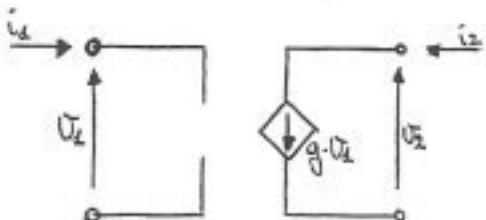
Quindi i_2 non dipende da V_D ma dalla tensione V_G , pertanto non è un legame LOCALE.

Possiamo così descrivere in tal modo:



Questo è il:
DISPOSITIVO

Possiamo vedere ciascuna porta come un bipolo, anche se in realtà non lo è, però lo possiamo chiamare anche doppio-bipolo.
Ora allora possiamo rappresentare il dispositivo come:



Questo è il:
MODELLO (del dispositivo)



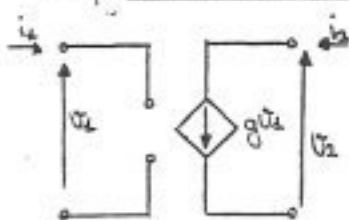
GENERATORE DI CORRENTE
COMANDATO IN TENSIONE.
VCCS

(imposte i ma comandato da u_1)

Il parametro g lega i_2 a u_2 . Dimensionalmente è come una condutta su [Ω^{-1}] ma è detto CONDUTTANZA DI TRASFERIMENTO oppure TRANSCONDUTTANZA.

GENERATORI COMANDATI:

→ generatore di tensione comandato in tensione: **VCCS**

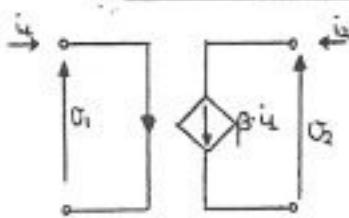


$$i_1 = 0$$

$$i_2 = g \cdot u_1$$

$$g: [\text{S}^{-1}] \quad \text{TRANSCONDUTTANZA}$$

→ generatore di corrente comandato in corrente: **CCCS**

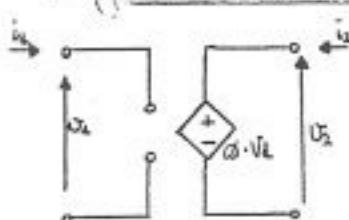


$$U_1 = 0$$

$$i_2 = \beta \cdot i_1$$

$$\beta: [\text{adimensionale}] \quad \text{AMPLIFICAZIONE di corrente}$$

→ generatore di Tensione comandato in tensione: **VCVS**

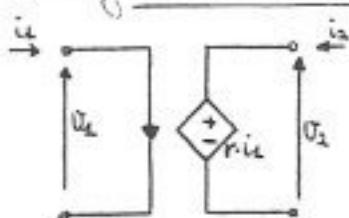


$$i_1 = 0$$

$$U_2 = \alpha \cdot U_1$$

$$\alpha: [\text{adimensionale}] \quad \text{AMPLIFICAZIONE di Tensione}$$

→ generatore di Tensione comandato in corrente: **CCVS**



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = r \cdot i_1$$

$$r: [\Omega] \quad \text{TRANSRESISTENZA}$$

Ora vogliamo fare l'analisi di circuiti che contengono anche questi "nuovi" componenti.

Il metodo di analisi con i generatori pilotati, si basa sulla giusta e "fisica" scrittura delle Leggi di Ohm e Kirchhoff.

Vediamo nella facciata seguente -

ANALISI CIRCUITI CON GENERATORI PILOTATI

Per analizzare questo tipo di circuiti seguiremo questo metodo:

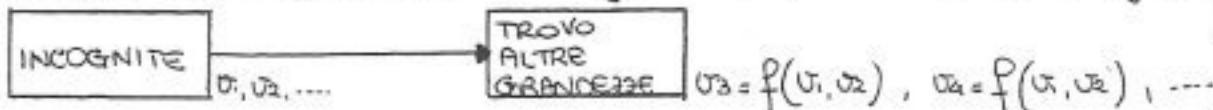
I° PASSO:

Individuare le incognite, cioè determinare un gruppo di tensioni e di correnti che risolvono:

- tra di loro indipendenti;

- complete (se conosciamo queste variabili siamo in grado di determinare tutte le altre).

Per esempio ora supponiamo di scegliere le tensioni come incognite:



II° PASSO:

Scegliere le leggi di Ohm.

Supponiamo che i bipoli siano controllati in tensione:

OHM	$U_3 = g(U_3, \dots) = \hat{g}(U_1, U_2)$
	$i_4 = g(U_4, \dots) = \hat{g}(U_1, U_2)$

III° PASSO:

Scegliere le leggi di Kirchhoff rimanenti (in questo caso le KCL):

KCL	$\sum i_k = 0 \rightarrow \sum i(U, U_2) = 0$
-----	---

Il procedimento puo' essere fatto anche al contrario, cioè partendo a determinare le correnti per poi trovare le tensioni.

I° PASSO:

KCL	$i_1, i_2 \rightarrow f(i_1, i_2) = i_3 ; f(i_1, i_2) = i_4 ; \dots$
-----	--

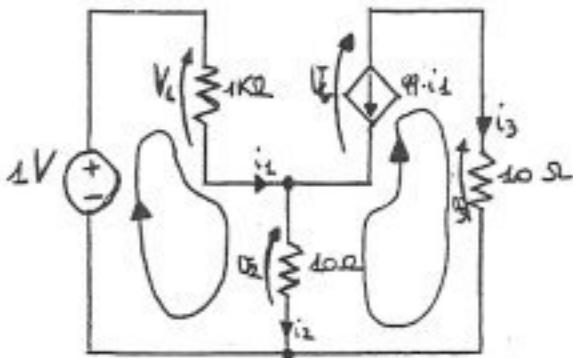
II° PASSO:

OHM	$U_3 = x_3(i_3, \dots), U_4 = z_4(i_4, \dots) \rightarrow = \hat{x}(i_1, i_2)$
-----	--

III° PASSO:

KVL	$\sum U_k = 0 \rightarrow \sum v(i_1, i_2) = 0$
-----	---

ESEMPIO:



- Trovare tutte le tensioni e tutte le correnti

Quando si troviamo davanti a generatori pilotati, una buona candidata ad essere considerata un'incognita è la grandezza pilota.

Aveendo indicato quindi " i_1 " come incognita di partenza,

possiamo scrivere tutte le altre correnti in funzione di i_1 :

$$i_3 = -99 \cdot i_1 \quad (\text{i già in funzione di } i_1)$$

$$i_2 = 99i_1 + i_1 = (1+99) \cdot i_1 = 100i_1 \quad (\text{grazie a KCL, } i_2 = f(i_1))$$

Ricordato vediamo proprio che " i_1 " è la nostra incognita.

Ora eschiammo la maglie rosse alla quale applicare la KVL per determinare i_1 .

Possiamo eseguire la maglie rosse, ma notiamo che non sappiamo determinare la tensione sul generatore pilotato, quindi la legge di Ohm non è controllata in corrente.

Allora proviamo con le maglie blu:

$$\text{KVL} \quad 1V - V_1 - V_2 = 0 \quad 1V = V_1 + V_2 = (i_1 \cdot 1k\Omega) + (\underbrace{(1+99)i_1 \cdot 10\Omega}_{i_2})$$

$$1V = i_1 \cdot 10^3 + (100 \cdot i_1) \cdot 10 = i_1 \cdot 10^3 + i_1 \cdot 10^3$$

$$1V = 2000 \cdot i_1$$

$$\boxed{i_1} = \frac{1V}{2000 \Omega} = \boxed{0,5 \text{ mA}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

A questo punto posso trovare tutte le altre grandezze:

$$i_3 = -99 \cdot i_1 = -99 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = -49,5 \text{ mA}$$

$$i_2 = i_1 + i_3 = 0,5 \cdot 10^{-3} + (-49,5) \cdot 10^{-3} = +50 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$V_4 = i_4 \cdot 1K\Omega = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ V}$$

$$V_2 = i_2 \cdot 10 \Omega = +50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = +50 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

$$V_3 = i_3 \cdot 10 \Omega = -49,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = -49,5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

Ora possiamo determinare anche la V_G sul generatore pilotato, poiché possiamo applicare la KVL sulla maglia rosse:

$$V_G - V_3 + V_2 = 0$$

$$V_G = V_3 - V_2$$

$$\begin{aligned} &= -49,5 \cdot 10^{-2} - (+50 \cdot 10^{-2}) = -99,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} \\ &\approx -1 \text{ V} \end{aligned}$$

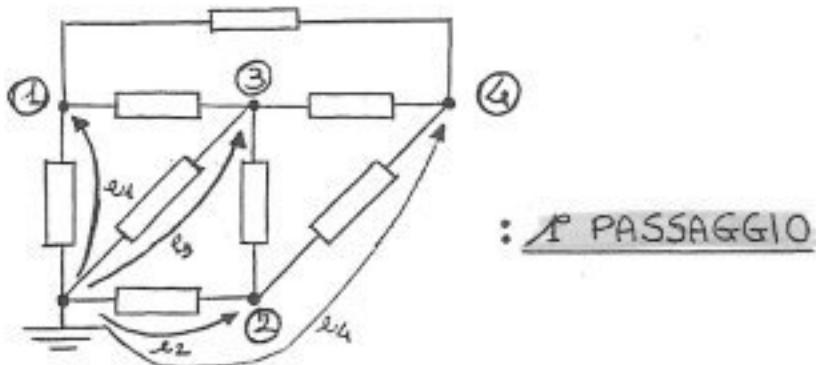
METODO DELL'ANALISI NODALE

Questo è un importante metodo, in quanto è forse il più usato dai simulatori circuituali (come SPICE).

Le INCognite che vengono scelte sono le tensioni di nodo.

Dato un circuito di l ladi ed m nodi, questo metodo consiste nel considerare un nodo di riferimento ed esprimere tutti i potenziali degli altri nodi in funzione di esso, ottenendo così $(m-1)$ potenziali di nodo.

ESEMPIO:



Quale grandezza sono indipendenti tra loro?

Se prendiamo una maglie non possiamo fare una somma di tensioni su una maglie che sia solo la somma di potenziali al nodo, quindi sono indipendenti. E poi sono **COMPLETI**, perché ogni tensione sul lato può essere espresso come differenza dei potenziali ai nodi, ad esempio:

$$U_{13} = e_1 - e_3$$

in generale:

$$U_{K\bar{f}} = e_K - e_{\bar{f}}$$

detto: leggi di Kirchhoff delle tensioni in funzione dei potenziali di nodo.

Se conosco i potenziali al modo posso trovare tutte le altre tensioni di lato. : 2° PASSAGGIO

3° PASSAGGIO:

$$\frac{i_p}{i_{ext}} = g \left(\frac{U_p}{U_{ext}} \right)$$

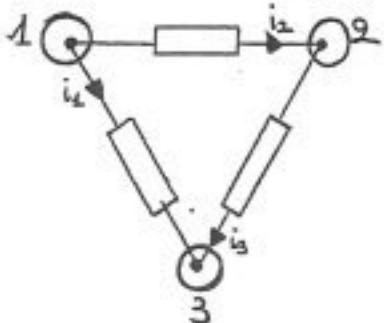
tutti i lati devono essere controllabili in tensione.

4° PASSAGGIO: Applico le KCL. Abbiamo $m-1$ potenziali di rete quindi dobbiamo avere $m-1$ leggi di Kirchhoff, delle correnti tra loro indipendenti.

$\sum i_{\text{int}}$ fatto per $m-1$ modi

Ora affrontiamo un piccolo disagio -

Equazione delle leggi delle correnti indipendenti



Quelle rosse sono le superfici di taglio ai nodi -

Considerando le superfici di Taglio ai nodi, scriviamo le equazioni:

- 1) $i_1 + i_2 = 0$ (scritte positive le correnti uscenti da superfici di Taglio, negative tutte le correnti entranti nelle superficie)
- 2) $i_3 - i_2 = 0$
- 3) $-i_2 - i_3 = 0$

Queste equazioni sono lineari, ma sono anche indipendenti?

Vediamo come sono le equazioni linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_n \cdot f_n = 0 \\ \text{l'unica soluzione è} \\ \text{per } c_1, \dots, c_n = 0 \end{array}$$

E' importante scrivere equazioni linearmente indipendenti poiché ci sia una e una sola soluzione. Quindi:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = 0 \\ -i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni NON sono fra loro indipendenti, cioè posso ricavare una di esse con combinazione lineare delle altre -

Proliamo allora a sommare le prime equazioni:

$$\begin{array}{rcl} i_1 + i_2 & = 0 \\ -i_2 + i_3 & = 0 \\ \hline i_1 + i_3 & = 0 \end{array}$$

l'equazione lineare qui ottenuta è la stessa (a meno del segno) trave equazione che avremmo scritto prima.

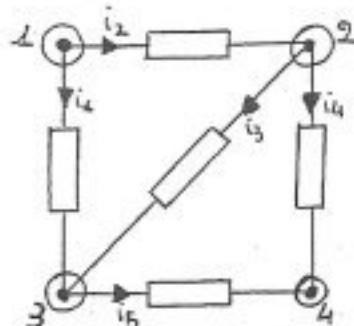
Quindi scriviamo $m-1$ equazioni affinche siano linearmente indipendenti.

Nell'esempio scriviamo solo le prime due equazioni:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = 0 \\ -i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

Entrambe non sono linearmente ricavabili dall'altra.

Il procedimento si può generalizzare per qualsiasi rete comunque composta:



$5 = l$: lati
 $4 = n$: nodi

Della rete, in cui ci sono 4 nodi, possiamo scrivere 3 ($m-1$) equazioni linearmente indipendenti.

1) $i_1 + i_2 = 0$

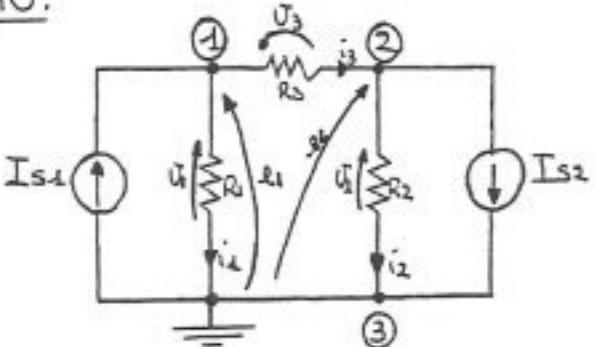
2) $-i_2 + i_3 + i_4 = 0$

3) Sarà combinazione lineare delle altre? No, ora compare anche lo i_5 , quindi possiamo scrivere:

$$-i_4 - i_3 + i_5 = 0$$

In generale, possiamo scrivere $m-1$ equazioni di Kirchhoff indipendenti.

ESEMPIO:



Applichiamo l'ANALISI NODALE.

Contiamo allora il numero di modi della rete-

Se corto-circuito come collegamento tra due nodi, mi comporta ad avere come un solo modo unico. Per questo motivo sulla rete possiamo individuare solo 3 nodi ($m=3$) .

Prendiamo il modo 3 come nodo di riferimento: fisicamente questo significa che soltanto misurare i potenziali e_1 ed e_2 con un voltmetro, dovremo inserire il puntale nero (masa) nel modo Tre, e poi andare ad inserire rispettivamente sul modo 1 e sul modo 2 il puntale rosso del tester..

In questo caso, e_1 ed e_2 sono le mie INCognite.

→ Triviamo le tensioni sui rami

$$\begin{cases} U_1 = e_1 \\ U_2 = e_2 \\ U_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

abbiamo espresso tutte le tensioni di lato in funzione delle incognite

→ Utilizziamo le leggi di Ohm

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U_1 \\ i_2 = \frac{1}{R_2} \cdot U_2 \\ i_3 = \frac{1}{R_3} \cdot U_3 \end{cases}$$

→ Applichiamo la KCL sugli $m-1$ nodi (tranne stile nodo 3 che non ha

Nodo 1:
$$-I_{S1} + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_1 - e_2}{R_3} = 0$$
 sostituisco alla tensione di lato il potenziale di nodo

Nodo 2:
$$I_{S2} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_2 - e_1}{R_3} = 0$$

Sistemando il sistema:

$$\begin{cases} e_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + e_2 \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) = I_{S1} \\ e_1 \cdot \left(-\frac{1}{R_3} \right) + e_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = -I_{S2} \end{cases}$$

le resistenze diventano così i coefficienti di "e" del sistema, mentre i generatori indipendenti sono i Termini noti.

ESEMPPIO NUMERICO:

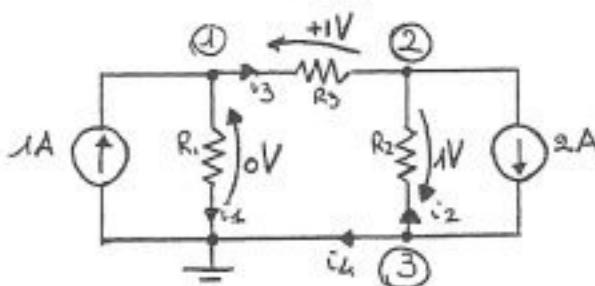
$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$$

$$I_{S1} = 1 \text{ A}$$

$$I_{S2} = 2 \text{ A}$$

$$\begin{cases} e_1 \cdot 1 + e_2 \cdot (-1) = 1 \\ e_1 \cdot (-1) + e_2 \cdot 2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2e_1 - e_2 = 1 \\ -e_1 + 2e_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} e_2 = 2e_1 - 1 \\ -e_1 + 2(2e_1 - 1) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_2 = 2e_1 - 1 \\ -e_1 - 2 + 4e_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} e_2 = -1 \text{ V} \\ 3e_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e_2 = -1 \text{ V} \\ e_1 = 0 \text{ V} \end{cases}$$



Ottenuti questi risultati potremo verificare controllando il bilancio delle correnti.

$$i_1 = 0 \cdot \frac{1}{R_1} = 0 \text{ A}$$

$$i_2 = 1 \cdot \frac{1}{R_2} = 1 \text{ A}$$

$$i_3 = 1 \cdot \frac{1}{R_3} = 1 \text{ A}$$

$$\text{KCL nodo 1)} \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

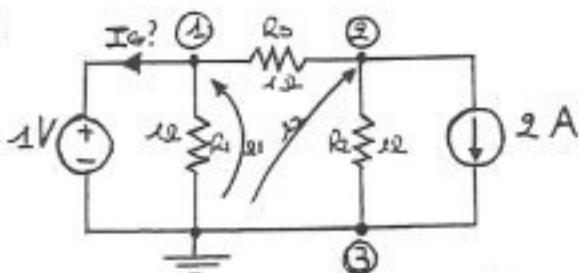
$$\text{KCL nodo 2)} \quad i_3 + i_2 = 2 \text{ A} \rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ A}$$

$$\text{KCL nodo 3)} \quad 2 \text{ A} = i_2 + i_4 \rightarrow i_4 = 1 \text{ A}$$

Un punto critico di questo metodo è che tutti i bipoli siano controllabili in tensione -

Ci sono bipoli che non sono controllabili in Tensione

I^o CASO:



Non riusciamo a scrivere la I_e entrante nel generatore in funzione della Tensione -

così in noceoso :

ANALISI NODALE MODIFICATA

Come mi tratta il bipolo NON controllabile in tensione?

Il calcolatore aggiunge una nuova incognita all'analisi. Noi non riusciamo a scrivere I_e in funzione di e_1 ed e_2 , quindi consideriamo I_e come la nuova incognita.

A questo punto allora abbiamo 3 incognite, mentre le equazioni si modi scritte prima erano solamente due, quindi abbiamo bisogno di un'altra equazione -

$$\left\{ \begin{array}{l} I_e + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_1 - e_2}{R_3} = 0 \\ \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_2 - e_1}{R_3} + 2A = 0 \\ e_1 = 1V \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{I}^a \text{ equazione: nodo 1} \\ \text{II}^a \text{ equazione: nodo 2} \\ \text{III}^a \text{ equazione: legge costitutiva del generatore} \end{array}$$

Queste sono le 3 equazioni che riceverebbe SPICE.

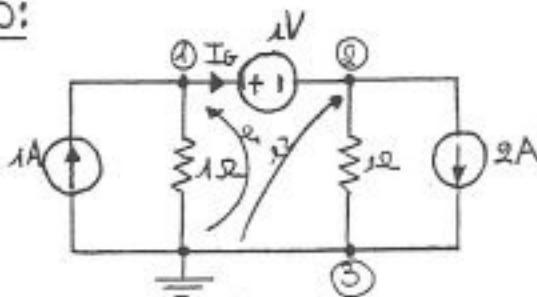
Dalle tre equazioni vediamo che I_e compare solo nel modo 1. Quindi dovremono eliminare quell'equazione e considerare solo il modo 2.

Prendiamo allora e_2 come sola incognita e riscriviamo il circuito solo al nodo 2, in quanto al modo 1 viene imposto dal generatore ($e_1 = 1V$, e questo solo perché il generatore di tensione è collegato tra il modo 1 ed il nodo di riferimento).

Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{e_1}{1\Omega} + \frac{e_2 - I}{1\Omega} + 2A = 0$$

II° CASO:



On questo il generatore non impone la tensione al nodo. Restando cerchiamo un altro "trucco".

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_1}{1} + 1 + I_G = 0 \\ \frac{e_2}{1} + 2 - I_G = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_1}{1} + 1 + I_G = 0 \\ \frac{e_2}{1} + 2 - I_G = 0 \\ e_1 - e_2 = 1V \end{array} \right.$$

Queste sono le equazioni che riceverà be SPICE.

Questa terza equazione dovrà a:



Usiamo ora l'"artificio":

Possiamo sommare le prime due equazioni, e queste operazione esplicita il fatto che è come se facessimo diventare le 2 superfici gaussiane in una unica superficie gaussiana!



due superfici gaussiane.



una unica superficie gaussiana.
Questa operazione porta così a definire il SUPERNODO.

Ora possiamo scrivere allora le due sole equazioni:

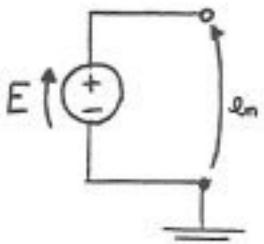
summa i due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e_1}{1} + \frac{e_2}{1} + 3 = 0 \\ e_2 = e_1 - 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{e_1}{1} + \frac{e_1 - 1}{1} + 3 = 0$$

Facciamo un breve ripasso sull'analisi nodale -

In alcuni casi questo metodo non è utilizzabile, poiché un elemento della rete non è controllabile in tensione.

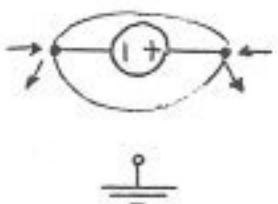
ESEMPIO:



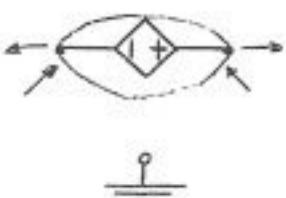
Per questo tipo di bipolo viene utilizzata l'analisi nodale modificata. Nei simulatori viene aggiunta una corrente e quindi un'incognita, mentre noi consideriamo la tensione di modo e come NOTA ($e_m = E$)

Il discorso vale anche per i generatori pilotati.

ESEMPIO:

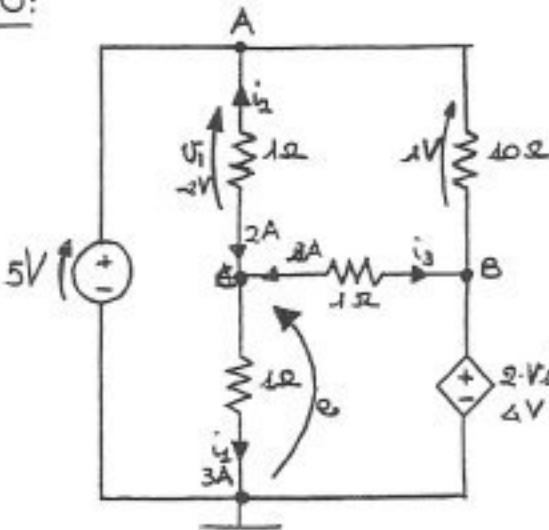


Quando il dispositivo non è collegato a riferimento massa, ma tra due altri nodi, il bipolo va considerato come un SUPERNODO.



Tali discorsi valgono anche per i generatori pilotati.

ESEMPIO:



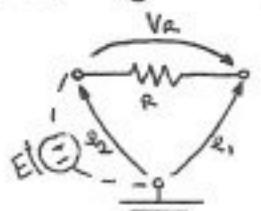
Determinare la tensione V_1 .

(non è controllabile in tensione, perché non so determinare le correnti date da tensione)

Possiamo utilizzare di utilizzare i modi A e B ed usare come incognite solamente e . Allora possiamo scrivere:

$$i_1 = \frac{e}{1}$$

Per calcolare i_2 ricordiamo che:



La tensione su R è data da $V_2 - e_1 - e_2$, dato se potrebbe essere anche un generatore (ϵ)
Quindi:

$$i_2 = \frac{e - 5}{1}$$

Per calcolare i_3 dobbiamo scrivere:

$$\text{KVL}) \quad V_1 = 5 - e$$

$$\downarrow \\ i_3 = \frac{e - 2V_1}{1} = \frac{e - 2(5 - e)}{1}$$

Un questo modo abbiamo scritto tutte le correnti in funzione di e . Possiamo allora scrivere:

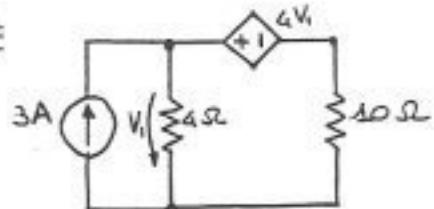
$$\text{KCL nodo C}) \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow e + e - 5 + e - 10 + 2e = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 5 \cdot e = 15 \quad e = 3V$$

Poi facciamo la verifica sul circuito elettrico

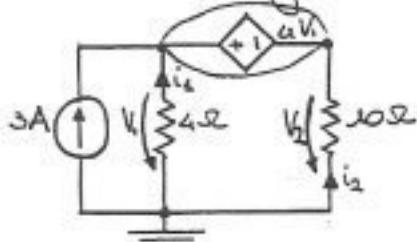
Caleoliamo anche la potenza assorbita da $R = 10\Omega$:

$$P_{R10} = \frac{V^2}{R} = \frac{e^2}{10} = 0,1 \text{ W}$$

ESEMPIO:



Prendiamo come incognita V_1 e ridisegniamo il circuito:



Consideriamo il generatore pilotato come supercondo e percorriamo la maglia:

$$\text{KCL}) \quad V_1 - V_2 = 4V_1 \quad \text{da cui}$$

$$V_2 = 5V_1$$

Trovate la legge di Ohm determiniamo i_2 :

$$i_2 = \frac{V_2}{10\Omega} = \frac{5V_1}{10} = \frac{1}{2}V_1$$

Ora consideriamo il supercondo e scriviamo l'equazione che lega le correnti entranti alle correnti uscenti dal supercondo:

$$3A + i_1 + i_2 = 0$$

$$3A + \frac{1}{4}V_1 + \frac{1}{2}V_1 = 0$$



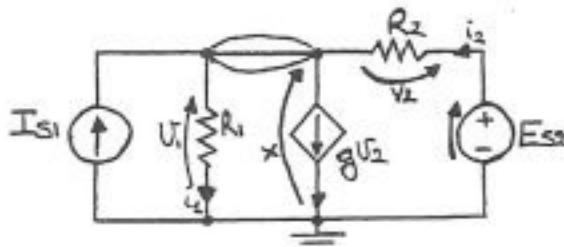
$$\frac{3}{4}V_1 = -3 \rightarrow V_1 = -4V$$

, ed ora possiamo scrivere il valore di tutte le tensioni e tutte le correnti di circuito.

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

TEOREMA o PRINCIPIO

Partiamo da un esempio per capire:



Prendiamo come incognita il solito potenziale di nodo:
possiamo considerare R_2 ed E_{S2} come un unico bipolo e scrivere:

$$KCL) x \cdot \frac{1}{R_1} - I_{S1} - g \cdot (x - E_{S2}) + \frac{x - E_{S2}}{R_2} = 0$$

Riscrivendo:

$$\underbrace{x \left(\frac{1}{R_1} - g + \frac{1}{R_2} \right)}_a = \underbrace{I_{S1} - g \cdot E_{S2} + \frac{E_{S2}}{R_2}}_b$$

Ottengono così un'equazione del tipo: $ax = b$, e non solo,
potremmo anche scrivere nel modo:

$$= I_{S1} \cdot \underbrace{1}_b + \underbrace{\left(-g + \frac{1}{R_2} \right) \cdot E_{S2}}_{b_2} \implies ax = b_1 \cdot I_{S1} + b_2 \cdot E_{S2}$$

Quindi possiamo osservare che:

1) Se tutti i generatori indipendenti sono aperti, la soluzione "UNICA" è per $x=0$. Quindi se tutti i generatori sono aperti mi dice che il circuito è in QUIETE, cioè tutte le grandezze sono = 0.

2) Quando i generatori NON sono aperti:

$$\text{se } a \neq 0: x = \frac{(1 \cdot b_1)}{a} \cdot I_{S1} + \frac{(1 \cdot b_2)}{a} \cdot E_{S2}$$

effetto di I_{S1} su x definito
effetto di E_{S2} su x definito

$$= h_1 \cdot I_{S1} + k_1 \cdot E_{S2}$$

h_1 e k_1 sono numeri che non dipendono dal valore dei genera-

tori, ma da come è fatto il circuito.

Se "+" tra i due effetti ci dice che l'effetto complessivo
è dato dalla sovrapposizione degli effetti (somme di effetti).

Ma torniamo un passo indietro:

$$\Rightarrow ax = b_1 \cdot I_{11} + b_2 \cdot E_{12}$$

Se in generale avessimo un sistema di molte più equazioni, potremmo scrivere:

$$Ax = b_1 \cdot I_{11} + b_2 \cdot E_{12}$$

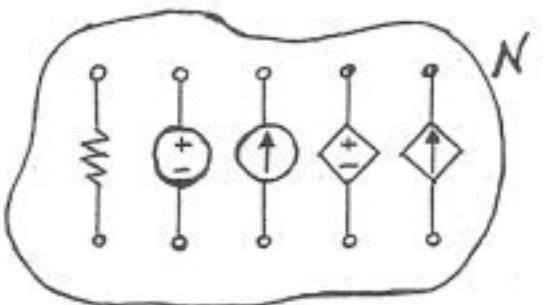
dove A è una matrice ed x è un vettore.

Il risultato resta comunque il medesimo (se $\det A \neq 0$, cioè la matrice A è invertibile):

$$x = (A^{-1}) \cdot b_1 \cdot I_{11} + \dots$$

Ogni grandezza resta comunque combinazione lineare dei generatori indipendenti (sottrazione degli effetti).

Ma quando posiamo applicare la sottrazione degli effetti?



Una rete composta ESCLUSIVAMENTE da questi elementi circuituali è governata da una legge lineare, quindi si dice che la rete è un CIRCUITO LINEARE, cioè un circuito composto esclusivamente da elementi la cui caratteristica è lineare.

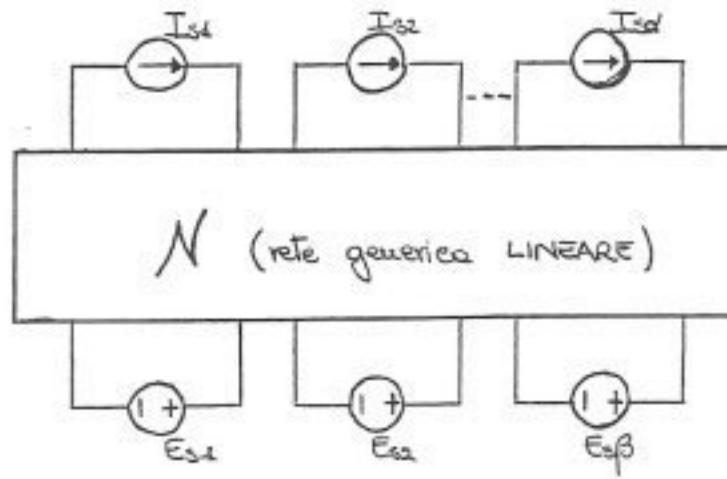
Esempio:

$$\begin{array}{c} i_1 \\ \text{---} \\ R \xrightarrow{i_1} U \\ \text{---} \end{array} \quad U = R \cdot i_1$$

$$\begin{array}{c} i_2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} i_2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad U_2 = r \cdot i_2$$

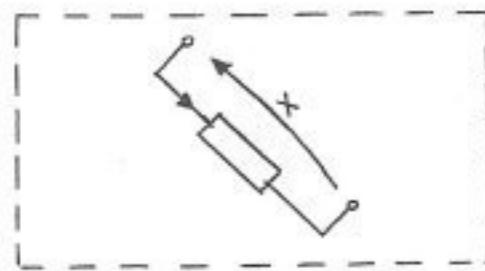
$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad U = E$$

Con l'esempio di prima abbiamo messo in evidenza i generatori indipendenti, indicandoli come le CAUSE dei fenomeni elettrici. Pertanto ora risolviamo la rete generica mettendo in evidenza i generatori indipendenti.



Se tutti i generatori sono = 0, la rete è in QUIETE cioè
Tutto è平静.

Se prendiamo ora della rete, ad esempio la grandezza X :



Possiamo scrivere la grandezza X come combinazione lineare di questo tipo:

$$X = \underbrace{h_1 \cdot I_{s1} + \dots + h_d \cdot I_{sd}}_{x'} + \underbrace{K_1 \cdot E_{ss} + \dots + K_p \cdot E_{sp}}_{x''}$$

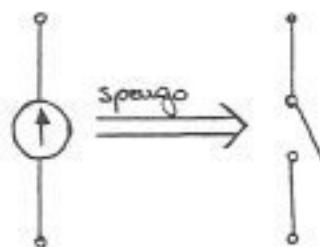
in cui h_1, \dots, h_d e K_1, \dots, K_p non dipendono dai generatori, ma da Tutto il resto del circuito -

Tutti i termini sono gli effetti dovuti alle singole sorgenti -

Ma possiamo ricavare ogni singolo termine? Certoamente -

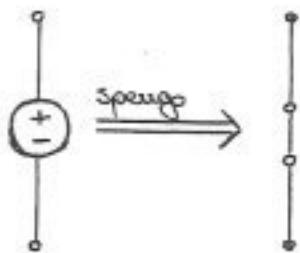
Possiamo male mano spegnere tutti i GENERATORI INDIPENDENTI (solo INDIPENDENTI) e lasciare acceso solamente quello di cui vogliamo ricavare l'effetto -

→ Spegnere i generatori di corrente significa:



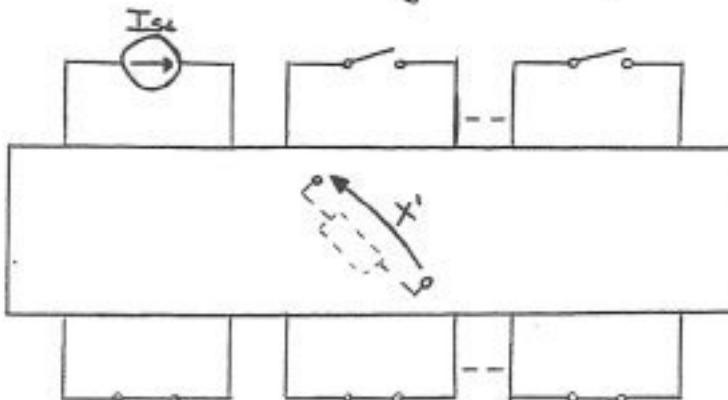
Spegnere un generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto

→ spegnere i generatori di tensione significa:



Spegnere un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto-circuito.

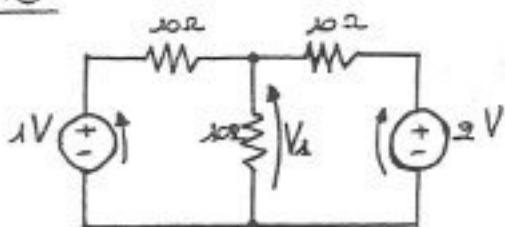
Ritornando sulla rete generica, se ora immaginiamo di eccitare il termine di X "causa" del generatore per esempio I_{se} :



Misuriamo la X' , otterremo così il primo effetto:
 $h_1 \cdot I_{se}$

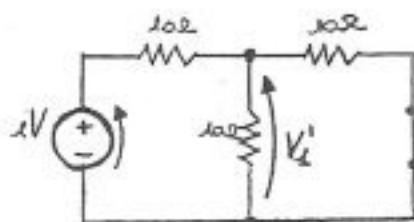
Di seguito possiamo farlo per tutti gli effetti, trovando così il termine di ogni "CAUSA" (ogni generatore indipendente), e poi sommato tra di loro tutti i termini in modo che risulti l'effetto Totale sulla grandezza. Queste sono quelle che viene chiamate le sovrapposizione degli effetti.

ESEMPIO:



Vogliamo determinare V_x .

I°) Spezzo il generatore da 2V e faccio agire quello da 1V, determinando la V_x in questo caso. Risolviamo:



Facendo il parallelo tra le due resistenze ricaviamo la resistenza equivalente.

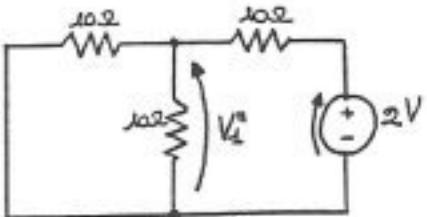
$$(10 \parallel 10) = \frac{10}{2} = 5 \Omega$$

Dato che la tensione V_x è la caduta di tensione sulla resistenza equivalente da 5Ω , possiamo quindi applicare il partitore di tensione per determinare V_x' in quanto la $R=5\Omega$ è in serie con la $R=10\Omega$. Pertanto:

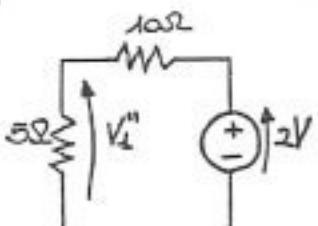
$$V_x' = 1 \cdot \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3} V$$

a questo si è l'effetto del generatore da 1V sulla tensione V_x .

II°) Spezzo il generatore da 1V e faccio agire quello da 2V, determinando la V_x in questo caso. Risolviamo:



Ora sono validi tutti i discorsi fatti nel caso precedente, pertanto possiamo scrivere:



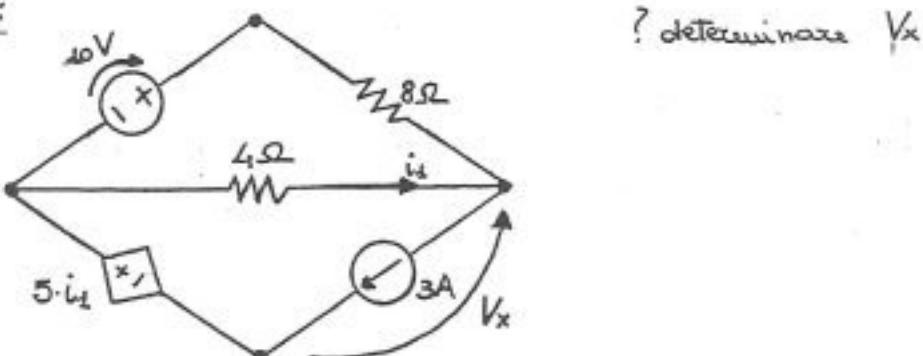
Determinata la resistenza equivalente del parallelo, possiamo anche qui applicare il portatore di tensione:

$$V_L'' = 2 \cdot \frac{5}{10+5} = \frac{2}{3} V$$

Quindi, per quanto dice il principio delle sovrapposizioni degli effetti, possiamo dire:

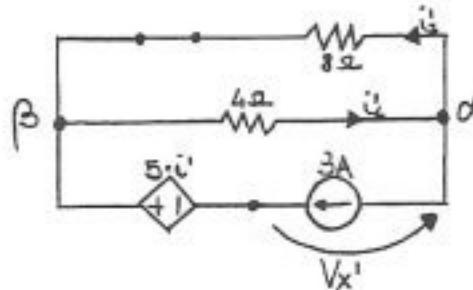
$$V_L = V_L' + V_L'' = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 V$$

ESEMPIO:



Applichiamo la sovrapposizione degli effetti.

I°) Facciamo agire il generatore di corrente e spegniamo il generatore di tensione. Quindi:



Possiamo notare che tutte le grandezze che troveremo ora saranno comunque tutte parziali. E' per questo motivo che le momeudanze si riporta su tutte le grandezze (ad esempio i_1').

Aveendo tre rami in parallelo, possiamo applicare il portato di corrente per determinare i_1' :

$$i_1' = 3 \cdot \frac{8}{4+8} = 2 \text{ A}$$

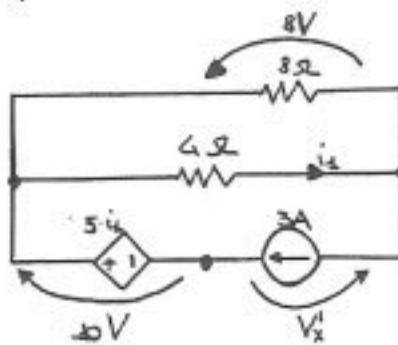
$$5 \cdot i_1' = 5 \cdot 2 = 10 \text{ V} \text{ (caduta sul generatore pilotato)}$$

Tramite la KCL al modo ci possiamo determinare i_2' :

$$\text{KCL d)} \quad 3\text{A} + i_2' = i_1' \rightarrow i_2' = 2 - 3 = -1 \text{ A}$$

Poi possiamo determinare, data i_2' , la caduta sulla resistenza de 8Ω:

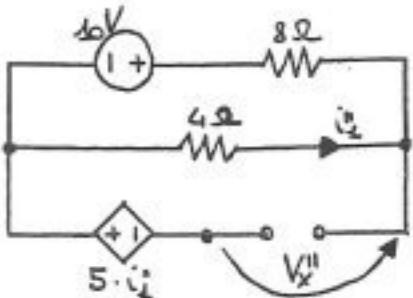
$V' = R(i_2') = 8 \cdot (-1) = 8 \text{ V}$, quindi ci troviamo nella situazione:



Applicando la KVL alla maglia esterna:

$$10\text{V} - 8\text{V} - V_x' = 0 \quad V_x' = 2 \text{ V}$$

II°) Ora facciamo agire il generatore di Tensione e spegniamo il generatore di corrente. Quindi:



Guardando il circuito notiamo che le 2 resistenze sono collegate in serie, in quanto sul ramo col generatore pilotato non circola corrente.

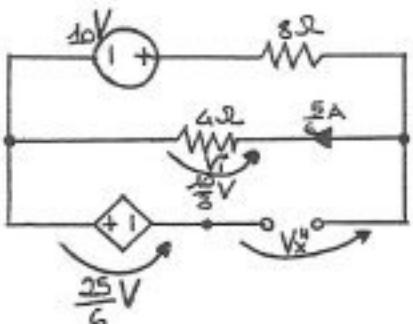
Perciò, dalla legge di Ohm determiniamo:

$$i_L = -\frac{10V}{(4+8)\Omega} = -\frac{5}{6} A$$

$$5 \cdot i_L = 5 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{6} V, \text{ metto + giro da caduta}$$

$$V_L' = -i_L \cdot 4 = \frac{5}{6} \cdot 4 = \frac{10}{3} V$$

Ci siamo così portati nella situazione:



Applicando la KVL alle maglie, possiamo scrivere:

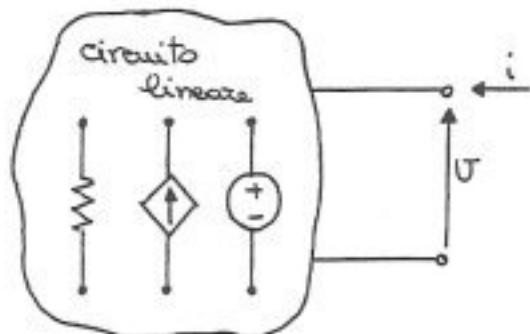
$$V_L' - \frac{25}{6} V - V_x'' = 0 \longrightarrow V_x'' = V_L' - \frac{25}{6} V = -\frac{5}{6} V$$

Ricavato, per il principio della sovrapposizione degli effetti ora possiamo scrivere:

$$V_x = V_L' + V_x'' = 2V - \frac{5}{6} V = \frac{7}{6} V$$

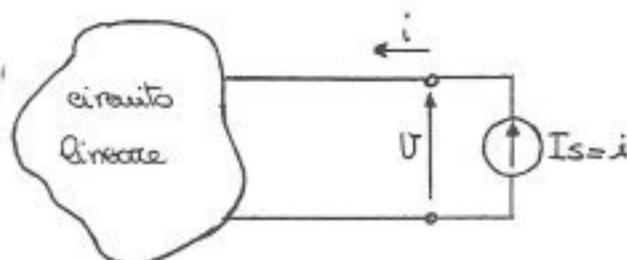
EQUIVALENTE THÉVENIN

EQUIVALENTE SERIE



Vogliamo sapere come la tensione dipende dalla corrente, cioè:
 $U = f(i)$

Pertanto imponiamo una corrente (comandata in corrente) e cerchiamo di determinare la tensione:



$$U = \underbrace{f_1 \cdot i}_{\text{Req. } i} + \underbrace{f_2 \cdot I_{S1} + \dots + K_1 E_{S1} + \dots}_{\text{generator interno}} = \text{Req. } i + E_{\text{eq}}$$

(così abbiamo dimostrato Thévenin)

Req. i = viene calcolata applicando "i" e spegnendo tutti gli altri generatori interni alla rete ($E_{\text{eq}} = 0$)

E_{eq} = viene calcolata spegnendo le correnti esterne ($\text{Req. } i = 0$)

Cioè:

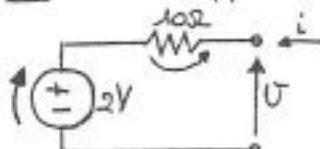
$$\text{Req. } i = \frac{U}{i} \Big| \text{ speguo gen. interni} \quad (\text{Req del modello Thévenin})$$

$E_{\text{eq}} = U \Big| \text{ speguo gen. esterni}$ (Tensione ai nodi)

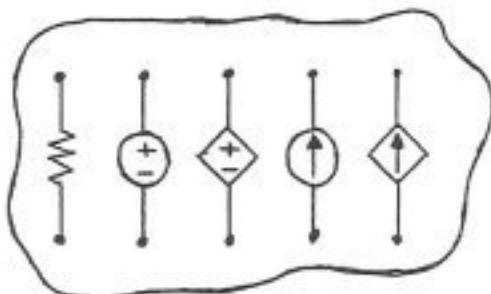
Possiamo fare un esempio di rappresentazione di questo:

$$U = 10 \cdot i + 2V$$

\downarrow Req. i + E_{eq}

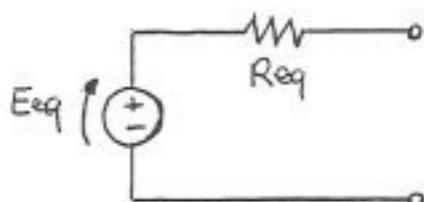


Quindi una rete lineare:



può essere rappresentata in modo equivalente dell'"equivalente Thévenin":

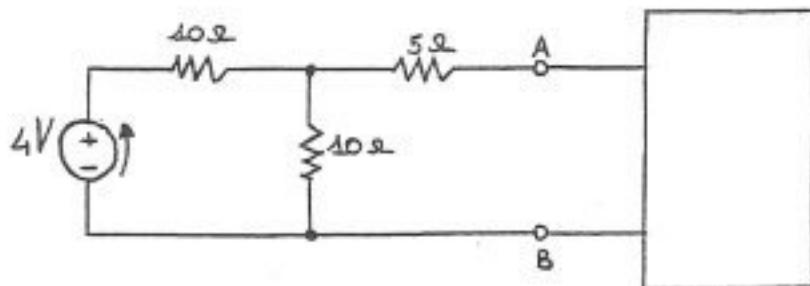
$$U = R_{eq} \cdot i + E_{eq}$$



MODELLO EQUIVALENTE THEVENIN

MODELLO SERIE

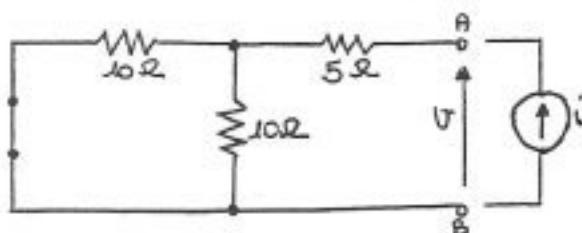
ESEMPIO:



Vogliamo Trovare l'equivalente Thévenin ai morsetti A-B,
perciò dobbiamo Trovare E_{eq} ed R_{eq} .

→ Calcolo delle R_{eq} :

Inserisco il generatore di corrente tra i morsetti A-B e spezzo
i generatori interni alla rete

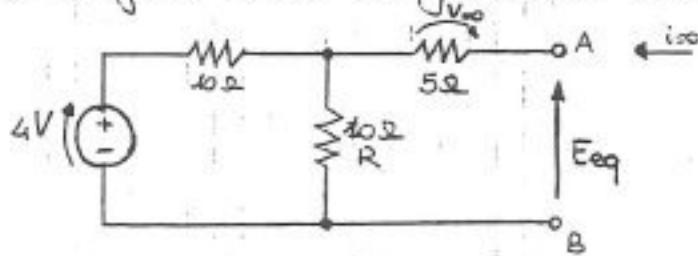


e poi, in generale, ecco il segnale tra la "i" applicato
mi e la "U". In questo caso $R_{eq} = \frac{U}{i}$.

$$R_{eq} = (10//10) + 5 = 10 \Omega$$

→ Calcolo della Eq:

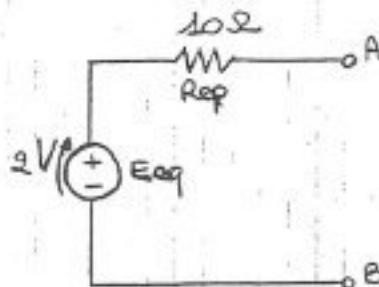
Se generatore esterno che noi abbiamo collegato ora viene spezzato, mentre vengono accesi i generatori interni:



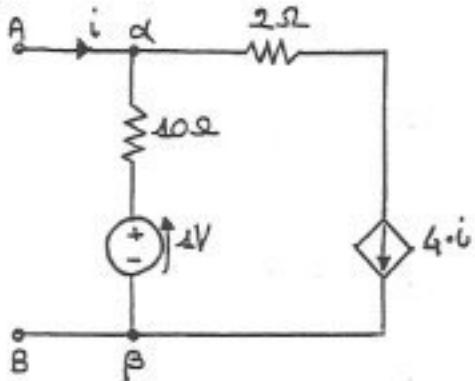
Visto il circuito, vediamo che sulla resistenza da 5Ω non circola corrente, quindi su essa non c'è caduta di tensione. Pertanto la Eq tra A e B è la caduta sulla resistenza $R = 10\Omega$. Le due resistenze da 10Ω sono in serie, quindi possiamo applicare il portatore di tensione:

$$Eq = 4V \cdot \frac{10}{10+10} = 2V$$

Quindi il circuito di Thévenin equivalente a quello di partenza è il seguente:



ESEMPIO:



Trofare l'equivalente Thévenin
ai morsetti A - B

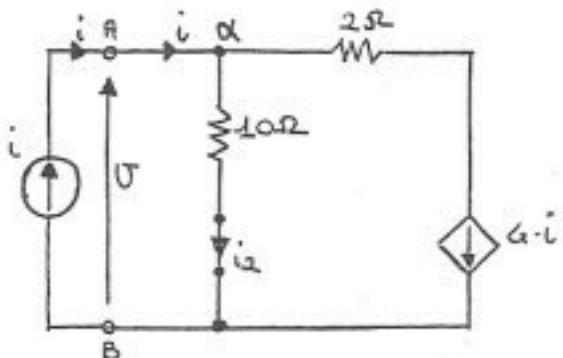
→ Calcoliamo E_{eq}

Essendo AB un aperto, la corrente $i=0$, di conseguenza anche $4 \cdot i = 0$. Quindi se tutte le correnti sono = 0, su tutte le resistenze le cadute è di 0 V, pertanto:

$$E_{eq} = 1V$$

→ Calcoliamo R_{eq}

Inseriamo il generatore di corrente e spegniamo i generatori interni.



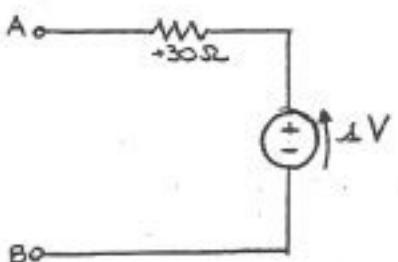
$$R_{eq} = \frac{U}{i}$$

$$\text{KCL nodo } \alpha) \quad i = i_2 + 4 \cdot i \quad \Rightarrow \quad i_2 = -3i$$

$$\text{Quindi:} \quad U = (-3i) \cdot 10 = -30i$$

$$R_{eq} = \frac{U}{i} = \frac{-30 \cdot i}{i} = -30 \Omega$$

Quindi l'equivalente Thévenin è:



Ripasso e informazioni aggiuntive:

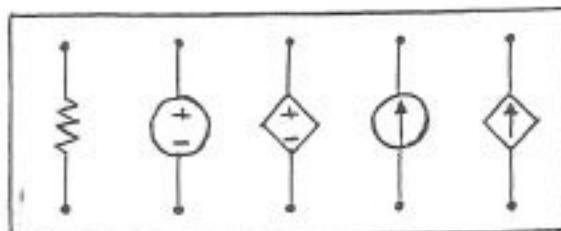
SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

Questo teorema può essere applicato quando sono verificate 2 ipotesi:

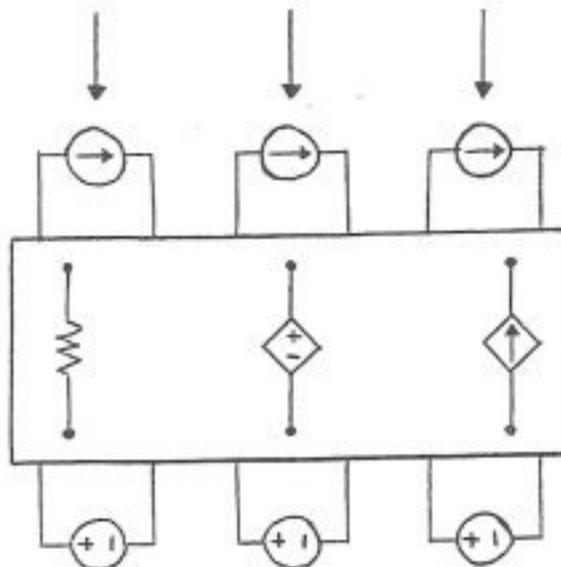
1^a IPOTESI : il circuito è lineare

2^a IPOTESI : unicità della soluzione

Se il circuito è lineare, possiamo vedarlo come un circuito che al suo interno ha resistenze e generatori pilotati; mentre all'estero i generatori indipendenti:



CIRCUITO LINEARE



CIRCUITO LINEARE CON
IN EVIDENZA I GENER.
INDIPENDENTI

La soluzione "UNICA" è:

SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

$$X = \sum_j h_j \cdot I_{sj} + \sum_j K_j \cdot E_{sj}$$

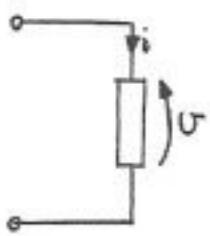
Ora analizziamo ora a ora le due ipotesi.

1 - circuito lineare : questo teorema (sovrapp. effetti) non vale quando nella rete c'è almeno un elemento che ha caratteristica non lineare.

In altre parole, se c'è un elemento le cui grandezze di Tensione e corrente non sono legate da una legge lineare, la sovrapposizione degli effetti non è applicabile -

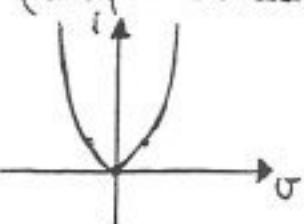
Esempio "per assurdo":

Abbiamo il bipolo:

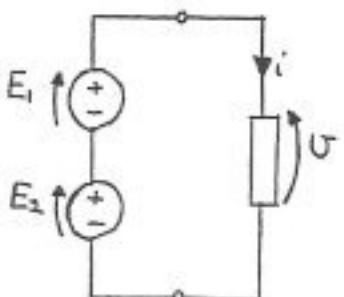


$$i = U^2$$

(esempio di caratteristica non lineare)



Se collegiamo il bipolo ad una rete:



→ Non vale la sovrapposizione degli effetti perché il bipolo non è lineare.

Ma proviamo "per assurdo" ad applicare comunque il prin

$$\rightarrow E_2 = 0, E_1 \neq 0$$

$$i' = E_1^2 \quad (\text{perché } U = E_1)$$

$$\rightarrow E_2 \neq 0, E_1 = 0$$

$$i'' = E_2^2$$

$$i_{\text{TOT}} = i' + i'' = E_1^2 + E_2^2$$

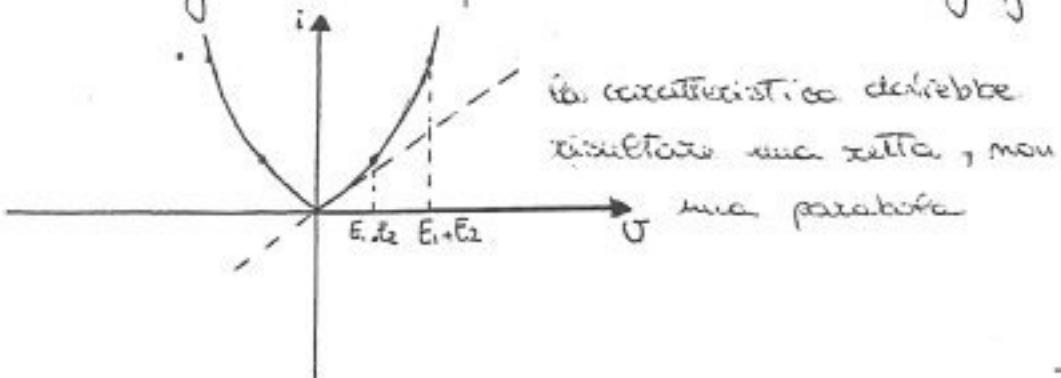
} SBAGLIATO

La soluzione giusta è: (nessa sovrapposizione effetti)

$$U = E_1 + E_2$$

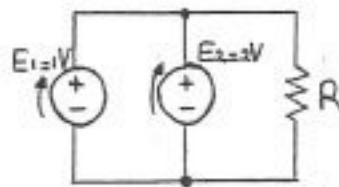
$$i_{\text{tot}} (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + 2E_1 E_2 + E_2^2 \quad \} \underline{\text{GIUSTO}}$$

Che è sbagliato, lo possiamo vedere anche graficamente



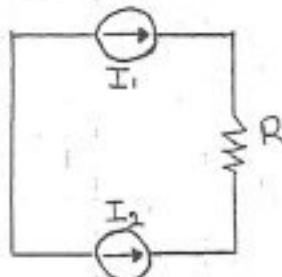
2 - unità della soluzione: utilizziamo due circuiti per comprendere il significato della "unità di soluzione":

1° CIRCUITO:



- $E_1 = 1V \quad E_2 = 2V \quad$ IMPOSSIBILE
- $E_1 = E_2 = 1V$. In tal caso sappiamo le correnti sul resistore, ma non possiamo sapere le correnti sui generatori. Due soluzioni, non vale la SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI.

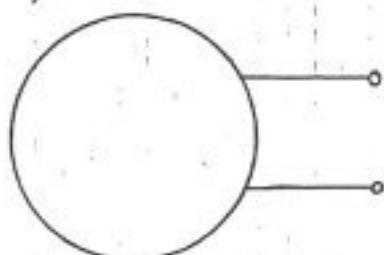
2° CIRCUITO:



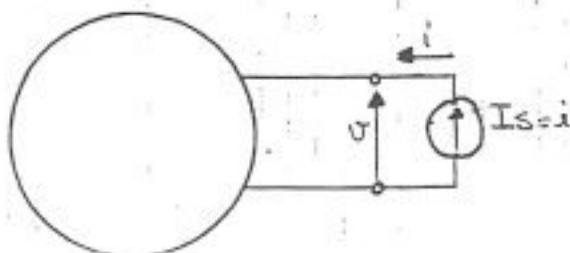
- $I_1 \equiv +I_2$, su R troviamo la σ , ma anche in questo caso non vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

EQUIVALENTE THÉVENIN

N lineare



Vogliamo estrarre l'equivalente Thévenin della rete lineare, il che vuol dire inserire un generatore da corrente tale che:



dove i è la variabile di controllo:
 $V = f(i)$

Se la rete N è lineare e dobbiamo avere la soluzione "UNICA" della rete che mettiamo noi (generatore di corrente). Allora:

$$U = \text{Req} \cdot i + E_{\text{eq}}$$

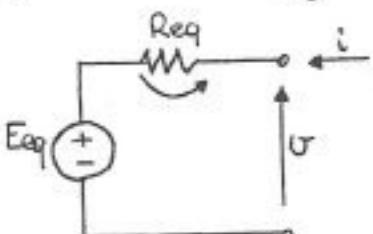
L'equazione sarà diversa da 0 ogni volta che ci saranno generatori indipendenti interni ad N .

Quindi:

$$\text{Req} = \frac{U}{i} \quad | \text{ spento tutti i generatori indipendenti interni}$$

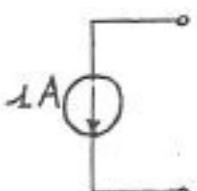
$$E_{\text{eq}} = U \quad |_{i=0} \quad (\text{in pratica lascio i morsetti aperti})$$

Quindi possiamo ridisegnare:

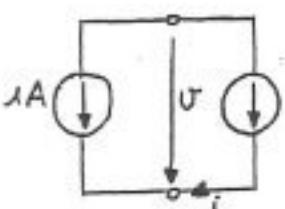


ESEMPIO:

Trovare l'equivalente Thévenin del circuito:

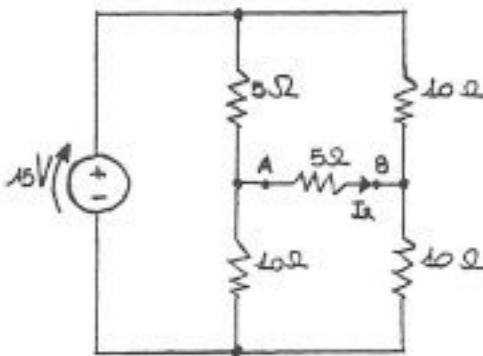


Ai due morsetti collegiamo il generatore di corrente per determinare l'equivalente.



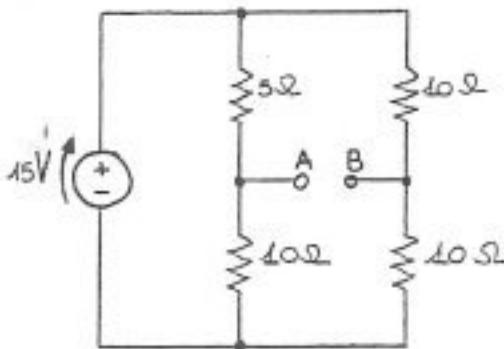
Osserviamo subito che il circuito è IMPOSSIBILE: non esiste l'equivalente di Thévenin.

ESEMPIO:

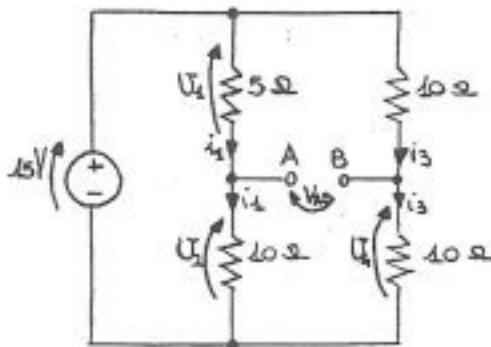


Determinare I_A .

Per applicare Thévenin alla risoluzione, stacchiamo ciò che è collegato tra A e B e analizziamo il circuito.



→ Calcolo della E_{eq}



Tramite il partitore di tensione calcoliamo V_A e V_B .

$$V_A = 15V \cdot \frac{10}{10+5} = \frac{3}{4} = 4,5V = V_B$$

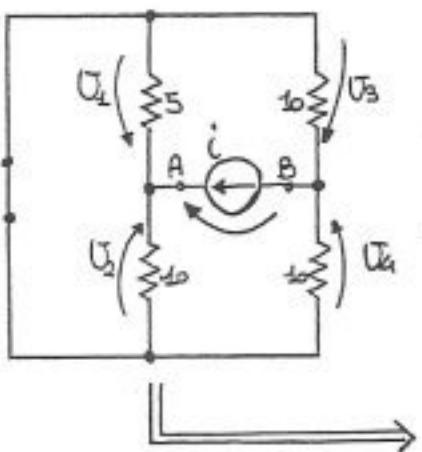
$$V_B = 15V \cdot \frac{10}{10+5} = 1 \cdot 10 = 10V = V_A$$

Pertanto V_{AB} è dato da:

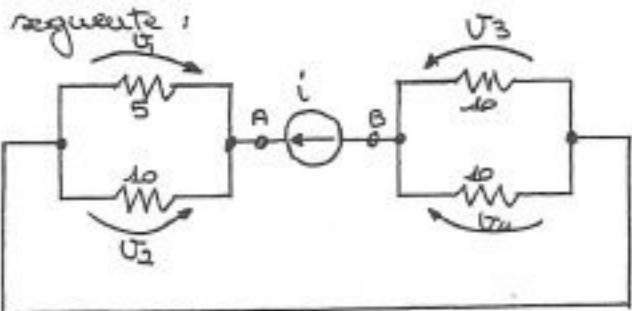
$$V_B - V_A = 10V - 4,5V = 2,5V = E_{eq}$$

→ Calcolo della R_{eq}

Ridisegniamo il circuito, inserendo il generatore di corrente "test" e spegnendo i generatori interni (cortocircuitiamo il generatore di tensione);



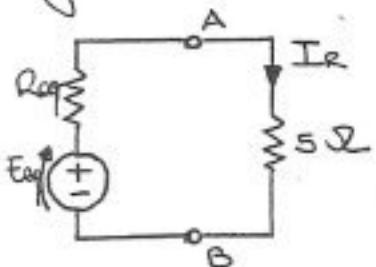
Dato il circuito possiamo notare che $U_1 = U_2$ e $U_3 = U_4$, quindi possiamo ridisegnare il circuito nel modo seguente:



$$U = i \cdot \left[\frac{5 \cdot 10}{5+10} + \frac{10 \cdot 10}{10+10} \right] = i \cdot \left[\frac{10}{3} + 5 \right] = i \cdot \frac{20}{3}$$

$$\frac{U}{i} = \frac{20}{3} = 8,3 \Omega = R_{eq}$$

Pertanto, l'equivaleente Thévenin del circuito ai morsetti A-B è il seguente:



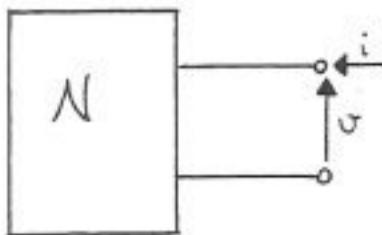
$$R_{TOT} = \frac{20}{3} + \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$$

$$I_R = \frac{2,5}{\frac{40}{3}} = 2,5 \cdot \frac{3}{40} = 0,29 \text{ A}$$

EQUIVALENTE NORTON

EQUIVALENTE PARALLELO

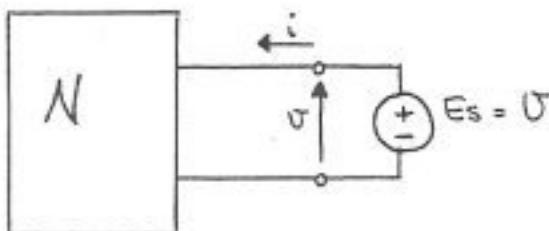
Data la rete N lineare e con una soluzione ("UNICA"):



Ma ora eschiamo il legame in cui v è la variabile indipendente:

$$i = g(v)$$

Portanto imponiamo una tensione (comandata in tensione) e chiamiamo di determinare la corrente:



$$i = G_{eq} \cdot v + h_1 \cdot I_{s1} + \dots + K_2 E_{s2}$$

correnti dovute a tutti i generatori interni

Perciò possiamo scrivere:

$$i = G_{eq} \cdot v + I_{eq}$$

$G_{eq} \cdot v$: viene calcolata applicando "v" e spegnendo tutti gli altri generatori interni alla rete ($I_{eq}=0$)

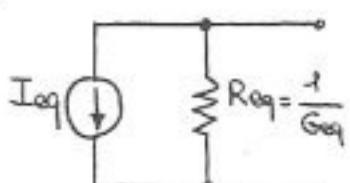
I_{eq} : viene calcolata spegnendo le correnti esterne ($G_{eq} \cdot v=0$)

Cioè:

$$G_{eq} = \frac{i}{v} \Big| \text{ spego gen. esterni} \quad (\text{G}_{eq} \text{ del modello Norton})$$

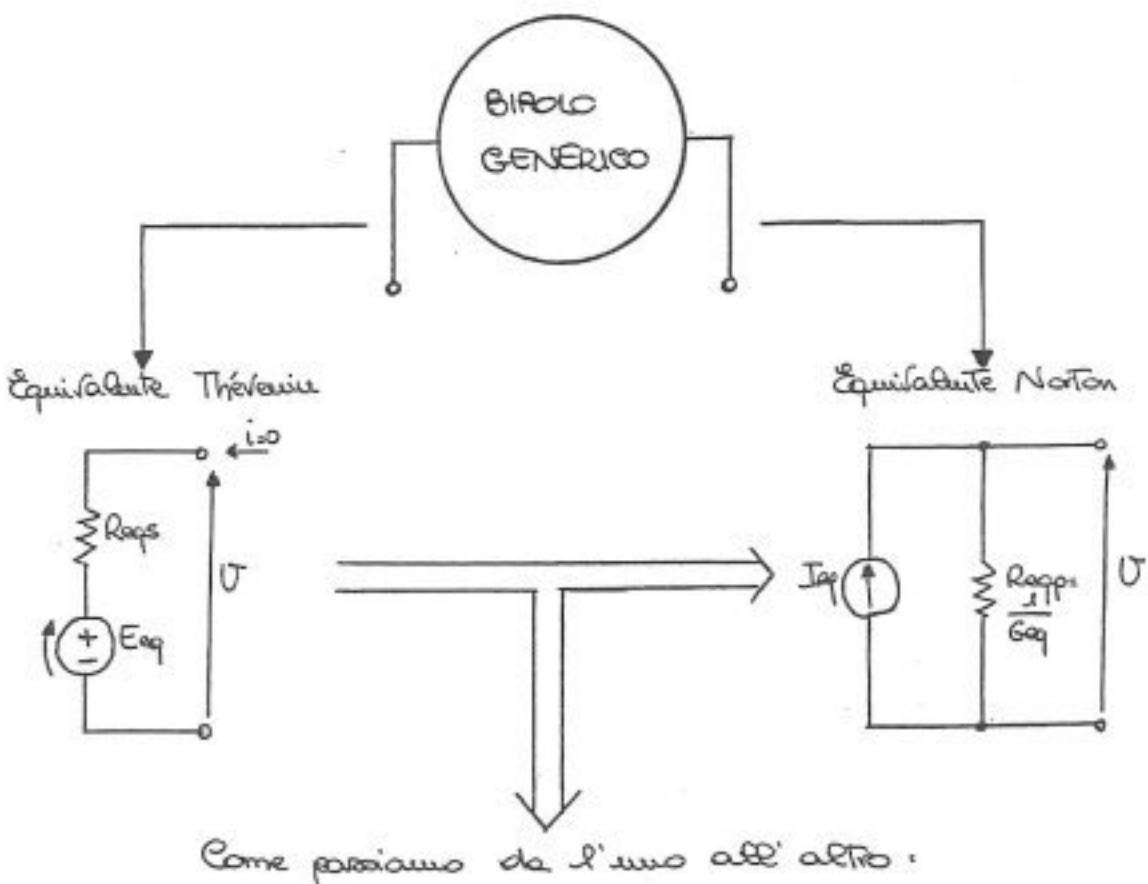
$$I_{eq} = i \Big| \text{ spego i gen. esterni} \quad (\text{corrente di corto-circuito})$$

Rappresentandolo:



EQUIVALENZA NORTON - THÉVENIN

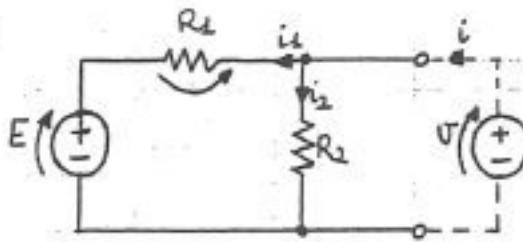
Prendiamo un generico dipolo che ammette le due soluzioni equivalenti:



$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_{eq} \\ E_{eq} &= I_{eq} \cdot R_{eq} \end{aligned}$$

Quindi ricavato l' equivalente di Thévenin possiamo ricavare l' equivalente di Norton, e viceversa.

ESEMPIO:



Trovare l'equivalente Norton della rete.

Collegiamo il generatore test \bar{U} e andiamo a determinare i :

$$i = g(\bar{U})$$

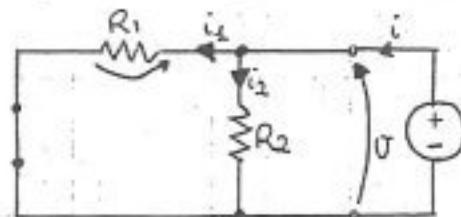
$$i_1 = \frac{(\bar{U} - E)}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{\bar{U}}{R_2}$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\bar{U} - E}{R_1} + \frac{\bar{U}}{R_2} = \frac{\bar{U}}{R_1} - \underbrace{\frac{E}{R_1}}_{I_{eq}} + \frac{\bar{U}}{R_2} = \underbrace{\bar{U} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}_{G_{eq}} - \underbrace{\frac{E}{R_1}}_{I_{eq}}$$

Anzi che questo metodo, avremmo potuto usare il metodo della sovrapposizione degli effetti:

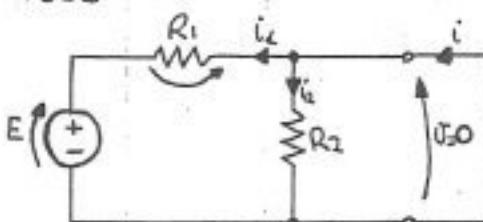
$$\rightarrow G_{eq} = \frac{i}{\bar{U}} \mid \text{sprinti i generatori interni}$$



$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \bar{U}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = G_{eq}$$

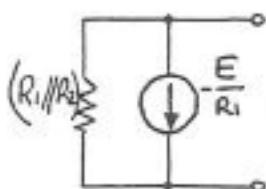
$$\rightarrow I_{eq} = i \mid_{\bar{U}=0}$$



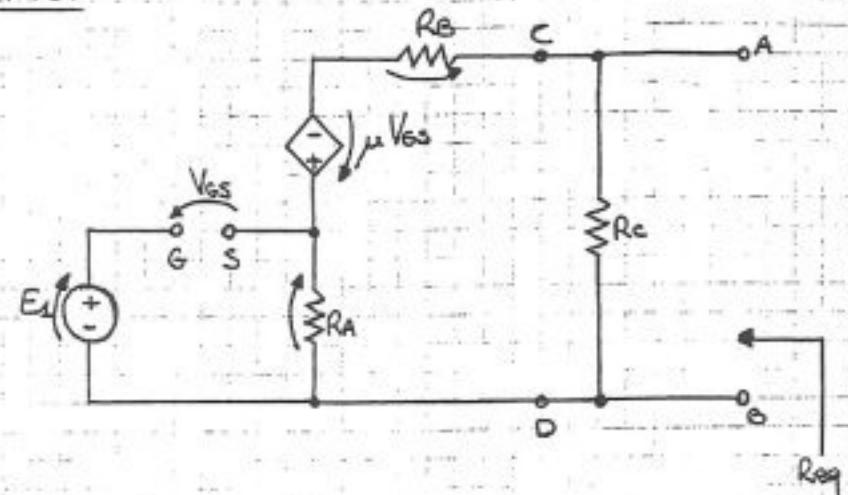
Dato che $\bar{U} = 0$, non ho carica su R_2 , quindi anche $i_2 = 0$. Pertanto possiamo dire che:

$$i = -\frac{E}{R_1} \Rightarrow I_{eq} = -\frac{E}{R_1}$$

L'equivalente Norton quindi è:



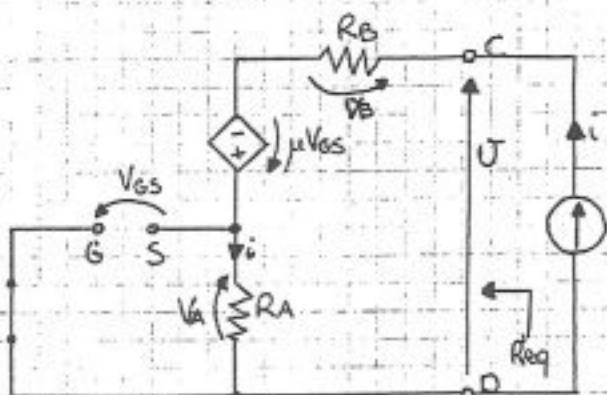
ESEMPIO:



Trovare la Req
sostituta tra A e B

Primos di partire notiamo che la rete è un grossso bipolo collegato in parallelo con R_C . Quindi troviamo la Req prima tra C e D e poi facciamo il parallelo con R_C .

Partiamo dunque da:



vedere riportata ad esempio
i e vogliamo determinar
o. (agisce i e sono aperte
i generatori interni)

Conosciamo la corrente che circola nella rete, cioè "i" quando $E_1 = 0$. Per tanto su R_A circola la corrente i , così possiamo determinare V_A , per poi sapere che $V_{GS} = -V_A$.

$$V_A = i \cdot R_A \quad V_{GS} = -i \cdot R_A \quad (\text{espresso } V_{GS} \text{ in funzione di } i)$$

$$\mu \cdot V_{GS} = -\mu (i \cdot R_A)$$

$$V = i \cdot R_B + i \cdot R_A + \mu R_A i$$

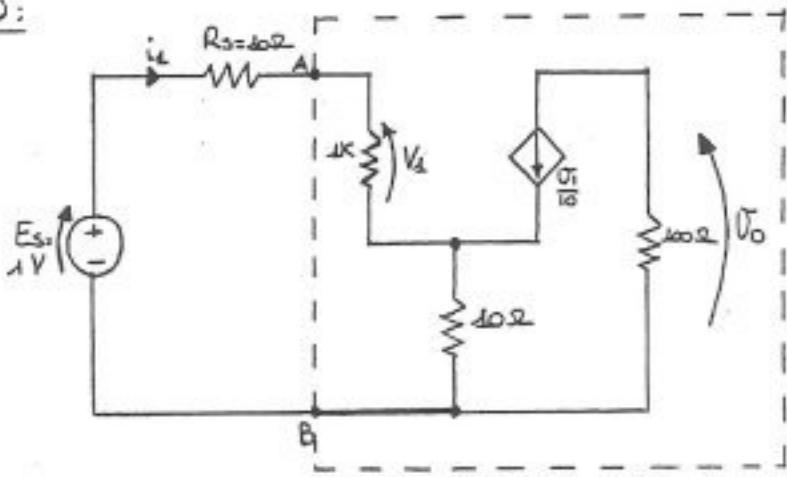
$$= i \underbrace{(R_B + R_A + \mu R_A)}_{Req}$$

e questo è il legame tra "i" ed "i" quando vengono aperti i generatori interni.

Per tanto: $Req = (R_B + R_A + \mu R_A)$ - , perciò:

$$Req = (R_B + R_A + \mu R_A) // R_C$$

ESEMPIO:



Determinare:

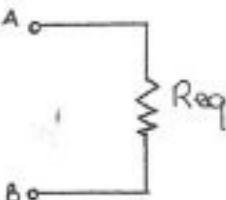
? V_0

? i_A

? Equivaleente tra
A e B

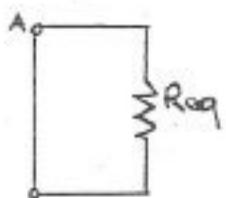
Troviamo l'equivalente tra A e B:

→ Equivaleente Thévenin:



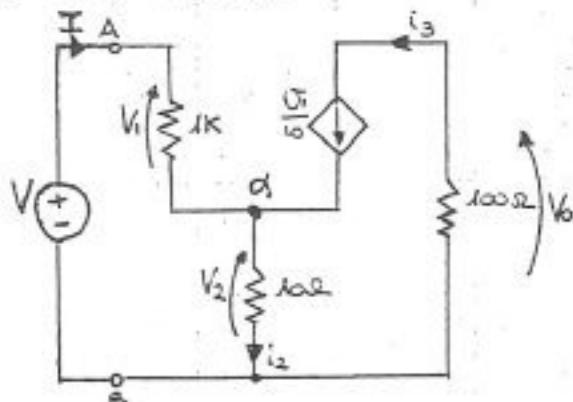
L'equivalente Thévenin sarà di questo tipo, cioè $E_{eq} = 0$, in quanto nella rete tra A e B non ci sono né generatori indipendenti di tensione che generatori indipendenti di corrente.

→ Equivaleente Norton:



L'equivalente Norton sarà di questo tipo, cioè $I_{eq} = 0$, in quanto nella rete tra A e B non ci sono né generatori indipendenti di tensione che generatori indipendenti di corrente.

Pertanto non ci resta altro da fare che determinare Req



$$G_{eq} = \frac{I}{V} \quad (\text{conduttanza che "sente" il generatore test})$$

$$\therefore i_3 = \frac{V_0}{100} = (I \cdot 1000) : 100 = 100I$$

Applichiamo la KCL al modo α :

$$i_1 = i_2 \rightarrow I = 100I + I = 101I$$

Ora conosciamo tutte le correnti, V è imposta, quindi dobbiamo cercare di scrivere V in funzione di I

$$V = V_1 + V_2 = I \cdot 1000 + (101 \cdot I) \cdot 10$$

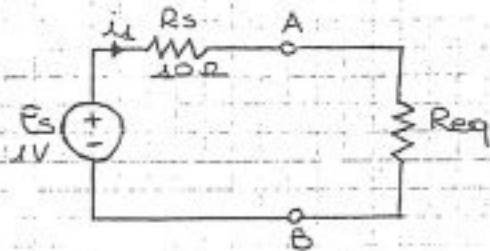
$$V = I(1000 + 1010) = I(2010)$$

Pertanto:

$$G_{eq} = \frac{I}{V} = \frac{I}{I \cdot 2010} = \frac{1}{2010} \Omega^{-1}$$

$$R_{eq} \approx 2 \text{ k}\Omega$$

Allora possiamo sostituire l'equivalente al circuito di potere? otteniamo così:



Possiamo così calcolare i_A :

$$i_A = \frac{E_s}{R_s + R_{eq}} = \frac{1V}{(2010 + 10) \Omega} \approx 0,5 \text{ mA}$$

Calcoliamo ora allora quante potesse essere il generatore di tensione:

$$P = V \cdot i = 1V \cdot 0,5 \text{ mA} = 0,5 \text{ mW}$$

Possiamo allora ora tornare indietro e calcolare tutto:

$$V_1 = i_1 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ V}$$

$$i_3 = \frac{V_1}{10} = \frac{0,5 \text{ V}}{10} = 0,05 \text{ A}$$

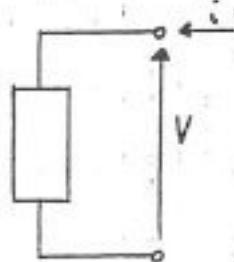
Pertanto V_0 :

$$V_0 = -(i_3 \cdot 100) = -5 \text{ V} \quad (\text{cioè l'ingresso viene amplificato e ribaltato})$$

Facciamo una CONSIDERAZIONE:

Consideriamo un bipolo elettrico.

- Un bipolo è una rete accessibile da una coppia di terminali:



Esso è caratterizzato da una tensione e da una corrente, le quali sono legate da una legge:

$$f(V, i) = 0$$

Fino qui noi abbiamo ristretto tale legge ai BIPOLI AFFINI, per i quali essa viene scritta in forma:

$$m \cdot V + n \cdot i + c = 0$$

FORMA IMPLICITA

nella quale $m, n, c \in \mathbb{R}$ (cioè sono costanti, numeri).

- Questa legge viene poi ancora risolte per ogni componente.

Ad esempio:

a) resistore: $V = R \cdot i$

cioè: se $c=0$ $\rightarrow m \cdot V + n \cdot i = 0$

$$P = R \cdot i \cdot i = (R) \cdot i^2$$

sempre
positiva

$$V = \left(-\frac{m}{n} \right) \cdot i$$

questa è la resistenza

b) generatore di tensione: $V = E$

cioè: se $m=0$ $\rightarrow m \cdot V = -c$

$$V = -\frac{c}{m}$$

c) generatore di corrente: $i = I_s$

cioè: se $n=0$ $\rightarrow m \cdot i = -c$

$$i = -\frac{c}{m}$$

Una volta date le forme implicite, possiamo passare alla forma in cui esplicitare una delle due variabili in funzione dell'altra. Chiamiamo dunque la FORMA ESPlicita.

- d. FORMA CONTRACCUTA IN PRESENTE (delle cui due rappresentazioni tipo node o equivalente Thévenin):

$$V = -\frac{m}{n} \cdot i - \frac{c}{m} \implies V = R_{eq} \cdot i + E_{eq}$$

2 - FORMA CONTROLLATA IN TENSIONE (stessa anche rappresentazione di tipo parabolico e Equival. Th. Norton)

$$i = -\frac{m}{n} \cdot U - \frac{c}{n} \implies i = G_{eq} \cdot U + I_{eq}$$

ESEMPIO NUMERICO:

$$U - \gamma \cdot i + 4 = 0$$

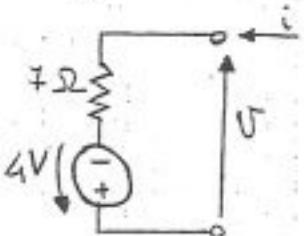
→ E' controllabile in corrente?

Si, perché possiamo esplicitare la tensione in funzione della corrente

$$U = \gamma \cdot i - 4$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\gamma} \Omega \quad E_{eq} = -4 \text{ V}$$

Il circuito quindi risulterebbe:



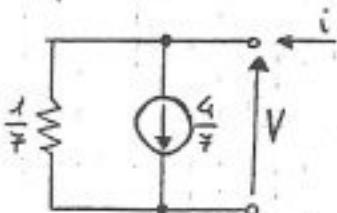
→ E' controllabile in tensione?

Si, perché possiamo esplicitare la corrente in funzione della tensione

$$i = \frac{1}{\gamma} \cdot U + \frac{4}{\gamma}$$

$$G_{eq} = \frac{1}{\gamma} \Omega \quad I_{eq} = \frac{4}{\gamma} \text{ A}$$

Il circuito quindi risulterebbe:



→ E' passivo?

Il bipolo è passivo quando $U \cdot i$ è sempre > 0 , qualunque siano le condizioni

→ E' attivo?

Il bipolo è attivo quando $U \cdot i$ può essere sia > 0 che < 0 .

→ Quanto vale I_{eq} ?

$$I_{eq} = \frac{4}{\gamma} \text{ A}$$

In generale:

$$m \cdot U + m \cdot i + c = 0$$

il componente $m \cdot i$ comporta in modo PASSIVO solo quando
 $c=0$.

ESEMPIO: $U + L = 0$

In questo caso il bipolo è controllabile in corrente, ma non in tensione, perché possiamo esplicitare la tensione, ma non la corrente:

$$U + L + (i \cdot 0) = 0$$

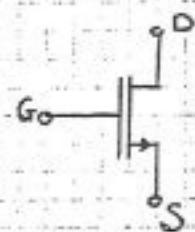
ESEMPIO: $i + Z = 0$

In questo caso il bipolo è controllabile in tensione, ma non in corrente, perché possiamo esplicitare la corrente, ma non la tensione: $i + Z + (0 \cdot 0) = 0$

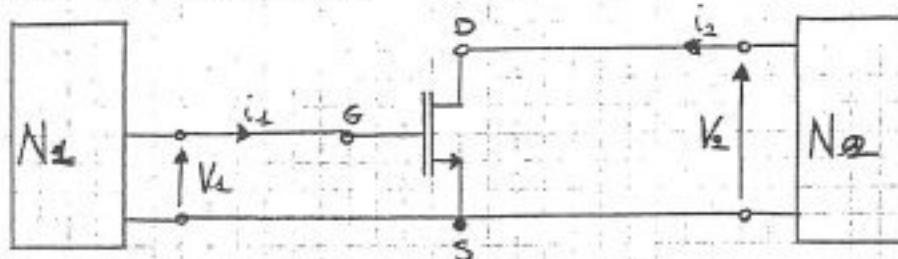
A questo punto possiamo generalizzare il discorso ai doppi bipoli.

DOPPI BIPOLI

Introduciamo questi modelli perché in elettronica ci sono dei dispositivi che hanno più di due terminali, come ad esempio i transistor:



Nelle applicazioni si prende uno dei terminali e lo si redoppia, modo da ottenere:



Transistor collegato
a due reti N_1 ,
per farlo funzio-
nare.

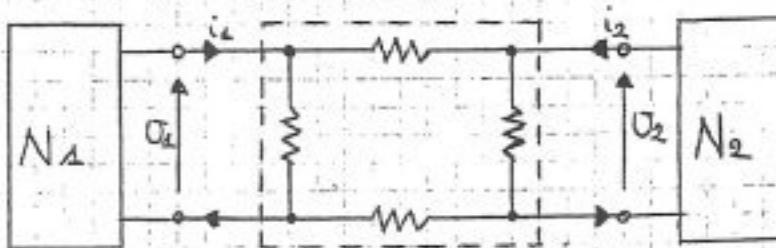
Le variabili che si distinguono sono: i_1 , i_2 , U_1 e U_2 .

Si vengono così a creare 2 PORTE ELETTRICHE, dalle quali c'è una corrente che entra ed una corrente che esce; così come una tensione che entra (U_1) ed una che esce (U_2). Possiamo così notare che rispetto al bipolo semplice, ora ci sono il doppio delle variabili. Pertanto il legame costitutivo del doppio bipolo non è una singola legge, ma due leggi:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(i_1, U_1, i_2, U_2) = 0 \\ f_2(i_1, U_1, i_2, U_2) = 0 \end{array} \right.$$

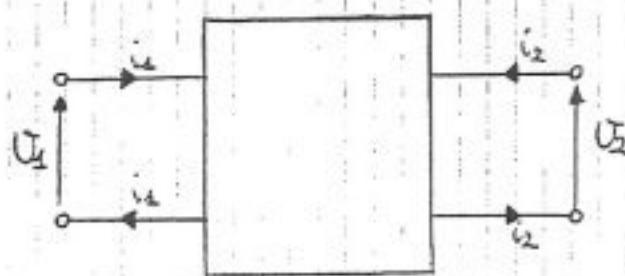
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(i_1, U_1, i_2, U_2) = 0 \\ f_2(i_1, U_1, i_2, U_2) = 0 \end{array} \right.$$

ESEMPIO:



Anche in questo caso le reti quadrettate in verde sono accessibili dall'esterno tramite i doppi morsetti.

Quindi possiamo rappresentare i doppi bipoli tramite il seguente MODELLO:



Possiamo semplificare in questo modo se abbiamo anche una rete comunque complessa e ci interessano solamente il comportamento ai terminali all'esterno (porta d'ingresso e porta d'uscita).

Dalle equazioni $\begin{cases} f_1(U_1, i_1, U_2, i_2) = 0 \\ f_2(U_1, i_1, U_2, i_2) = 0 \end{cases}$

consideriamo solamente i DOPPI GIRONI AFFINI:

$$f_1(U_1, i_1, U_2, i_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{11}U_1 + M_{12}U_2 + M_{11}i_1 + M_{12}i_2 + C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$f_2(U_1, i_1, U_2, i_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{21}U_1 + M_{22}U_2 + M_{21}i_1 + M_{22}i_2 + C_2 = 0 \end{array} \right.$$

Questa è la FORMA IMPLICITA, ma è comodo esplicitare le due equazioni in modo da esprimere due variabili in funzione delle altre due.

→ I^a FORMA - CON I PARAMETRI R

$$\begin{cases} U_1 = r_{11} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2 + E_1 \\ U_2 = r_{21} \cdot i_1 + r_{22} \cdot i_2 + E_2 \end{cases}$$

In questa forma vediamo scritte le tensioni in funzione delle correnti, praticamente significa scrivere l'equivalente di Thévenin. La MATRICE a PARAMETRI R è la seguente:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \text{ che dimensionalmente sono proprio tutte resistenze } [\Omega]$$

→ II^a FORMA - CON I PARAMETRI G

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} \cdot U_1 + g_{12} \cdot U_2 + I_1 \\ i_2 = g_{21} \cdot U_1 + g_{22} \cdot U_2 + I_2 \end{cases}$$

On questa forma vengono scritte le correnti in funzione delle tensioni, particolarmente significa essere l'equivalente di Norton. La MATRICE G è la seguente:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \text{ che dimensionalmente sono proprio tutte conduttoranze } [S^{-1}]$$

→ III^a FORMA - CON I PARAMETRI H (IBRIDI)

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot U_2 + E_1 \\ i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot U_2 + I_2 \end{cases}$$

Vengono esplicitate una tensione ed una corrente, fico le esplicitazioni delle IBRIDI:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

La seconda esplicitazione per i parametri ibridi H è la seguente:

$$\begin{cases} i_1 = h_{11} \cdot U_1 + h'_{12} \cdot i_2 + I_1 \\ U_2 = h'_{21} \cdot U_1 + h_{22} \cdot i_2 + E_2 \end{cases}$$

La matrice che ottieniamo è la seguente:

$$H' = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

→ IV^a FORMA - CON I PARAMETRI T (TRASMISSIONE)

$$\begin{cases} V_1 = t_{11} \cdot V_2 + t_{12} \cdot (-i_2) \\ i_1 = t_{21} \cdot V_2 + t_{22} \cdot (-i_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{per motivi pratici} \\ \text{si utilizza } -i_2 \end{matrix}$$

Questo viene anche detto rappresentazione di Trasmissione diretta, dalla quale si ottiene la matrice:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

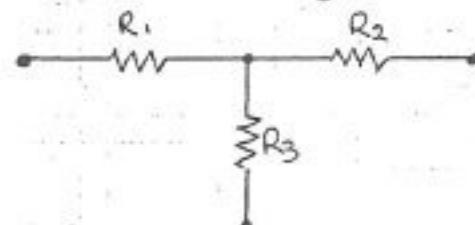
Ma ora torniamo un po' indietro per dare significato alle due scritture:

$$R \begin{cases} V_1 = r_{11} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2 + E_1 \\ V_2 = r_{21} \cdot i_1 + r_{22} \cdot i_2 + E_2 \end{cases}$$

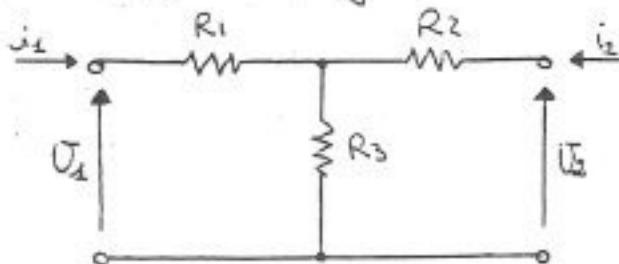
$$G \begin{cases} i_1 = g_{11} \cdot V_1 + g_{12} \cdot V_2 + I_1 \\ i_2 = g_{21} \cdot V_1 + g_{22} \cdot V_2 + I_2 \end{cases}$$

ESEMPIO:

Prendiamo in esame la seguente rete:



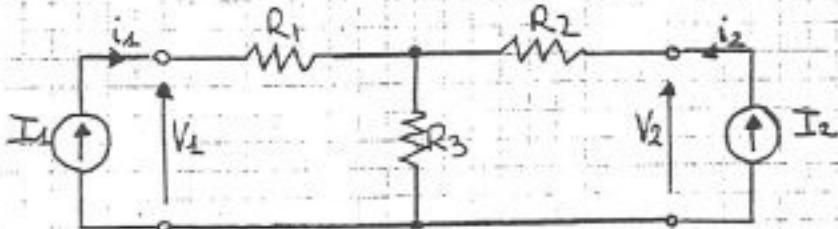
Abbiamo le tre resistenze collegate a stella (o a T) e vogliamo far diventare la rete un doppio bipolo. Basta sdoppiare il punto inferiore.



Per scrivere le equazioni dei parametri R, dobbiamo

IMPORRE le correnti i_1 ed i_2 e vedere cosa valgono U_1 e U_2 .
 Praticamente è come determinare l'equivalente Thévenin a cui sono imposte le correnti alle due porte (uscite e ingresso) e si vuole determinare le tensioni.

Imporre i_1 e i_2 alle porte significa:



Se la rete ha una sola soluzione, possiamo scrivere la grandezza (ad esempio U_1) in funzione dei generatori. Cioè

$$\rightarrow U_1 = i_1 \cdot r_{11} + i_2 \cdot r_{12} + \cancel{E} \leftarrow \text{che in questo caso non c'è}$$

$$r_{11} = \frac{U_1}{i_1} \quad \left| \begin{array}{l} i_2=0, \\ \text{spento i generatori interni} \end{array} \right.$$

$$r_{12} = \frac{U_1}{i_2} \quad \left| \begin{array}{l} i_1=0, \\ \text{spento i generatori interni} \end{array} \right.$$

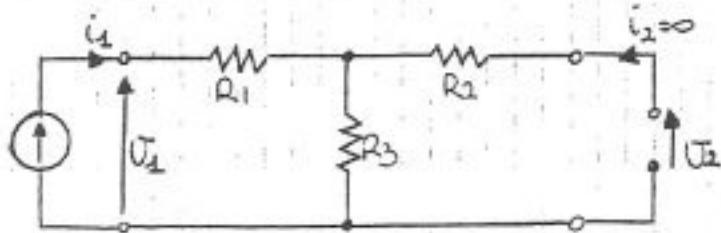
$$\rightarrow U_2 = i_1 \cdot r_{21} + i_2 \cdot r_{22} + \cancel{E}$$

$$r_{21} = \frac{U_2}{i_1} \quad \left| \begin{array}{l} i_2=0, \\ \text{spento i generatori interni} \end{array} \right.$$

$$r_{22} = \frac{U_2}{i_2} \quad \left| \begin{array}{l} i_1=0, \\ \text{spento i generatori interni} \end{array} \right.$$

Le operazioni di accendere e spegnere i generatori, valgono come applicare il principio delle sovrapposizione degli effetti detto anche principio semplice (prova i generatori una alla volta). Vediamo allora cosa succede sulla rete applicando questo principio:

→ Calcolo di r_{11} e r_{22}



$$\rightarrow r_{11} = \frac{U_1}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$

$U_1 = i_1 \cdot (R_1 + R_3)$, corrente per la serie delle 2 resistenze

$$r_{11} = \frac{i_1 \cdot (R_1 + R_3)}{i_1} = R_1 + R_3$$

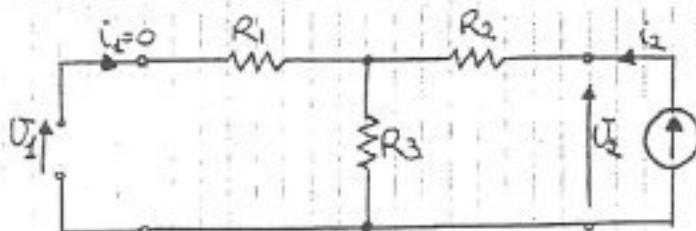
$$\rightarrow r_{22} = \frac{U_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$U_2 = i_2 \cdot R_3$$

essendo $i_2=0$ la caduta di tensione
in R_2 è uguale a zero, quindi la
 U_2 coincide con la caduta sulla
 R_3

$$r_{22} = \frac{U_2}{i_2} = \frac{i_2 \cdot R_3}{i_2} = R_3$$

→ Calcolo di r_{12} e r_{21}



$$\rightarrow r_{12} = \frac{U_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$U_2 = i_2 \cdot (R_2 + R_3)$$

$$r_{12} = \frac{i_2 \cdot (R_2 + R_3)}{i_2} = R_2 + R_3$$

$$\rightarrow R_{22} = \frac{U_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$U_2 = i_2 \cdot R_3$$

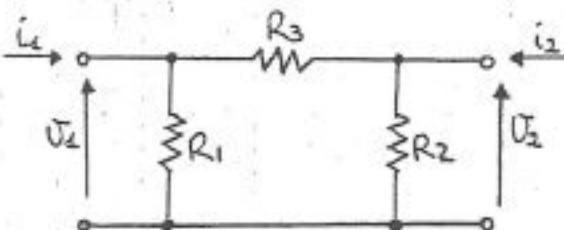
$$R_{22} = \frac{i_2 \cdot R_3}{i_2} = R_3$$

Pertanto la matrice dei parametri R ottenuta è la seguente:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

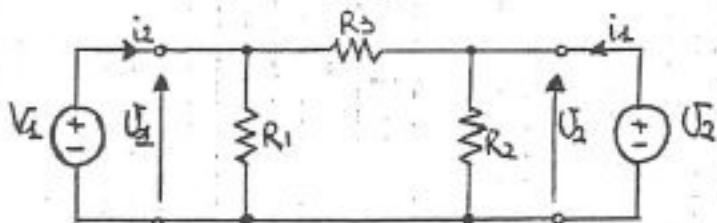
ESEMPIO:

Trovare i parametri G del seguente doppio bipolo:



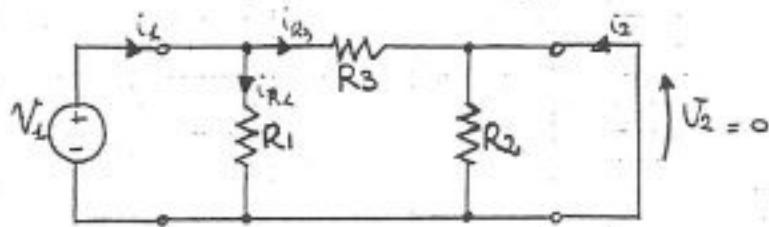
Per scrivere le equazioni dei parametri G , dobbiamo conoscere le tensioni U_1 e U_2 e vedere cosa fanno le correnti i_1 e i_2 . Pertanto è come determinare l'equivalente di Norton in cui sono imposte le tensioni alle due porte (uscita e ingresso) si vuole determinare le correnti.

Imporre $U_1 = U_2$ significa:



Ora possiamo operare come nell'esempio precedente, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, facendo agire un solo generatore alla volta:

→ Caleolo di g_{11} e g_{21}



$$\rightarrow g_{11} = \frac{i_1}{U_1} \mid U_2 = 0$$

$$i_1 = i_{R1} + i_{R3} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_3} = U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$g_{11} = \frac{U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)}{U_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}$$

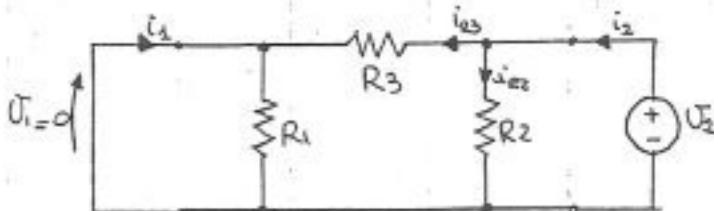
$$\rightarrow g_{21} = \frac{i_2}{U_2} \mid U_2 = 0$$

$$i_{R3} = \frac{U_1}{R_3} \quad \text{che poi andrà tutta nel conto corrente}$$

$$i_2 = -\frac{U_1}{R_3} = U_1 \left(-\frac{1}{R_3} \right)$$

$$g_{21} = \frac{U_1 \left(-\frac{1}{R_3} \right)}{U_1} = -\frac{1}{R_3}$$

→ Caleolo di g_{12} e g_{22}



$$\rightarrow g_{12} = \frac{i_2}{U_2} \mid U_2 \neq 0$$

$$i_2 = i_{R3} + i_{R2} = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} = U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$g_{12} = \frac{U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}{U_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\rightarrow g_{42} = \frac{i_2}{U_2} \Big|_{U_4=0}$$

$$i_2 = -\frac{U_2}{R_3}$$

$$g_{42} = \frac{-U_2 \left(\frac{1}{R_3} \right)}{U_2} = -\frac{1}{R_3}$$

Ricavato la matrice dei parametri G ottenuta è la seguente:

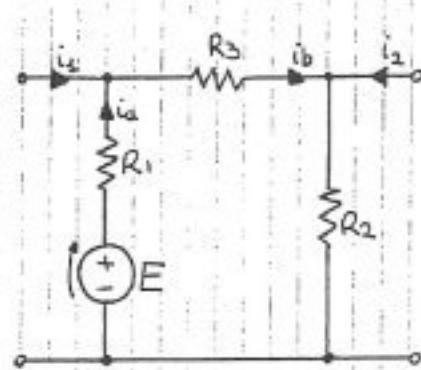
$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

Come si può notare anche in questo caso la matrice è simmetrica. Questo accade sempre quando la rete è composta da soli resistori (legge di Reciprocoità e di Lorentz)

Potremmo risolvere la rete anche tramite il metodo diretto notando che $U_{RS} = U_2 - U_4$. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} i_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_3} = U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + U_2 \left(-\frac{1}{R_3} \right) \\ i_2 = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2 - U_1}{R_3} = U_1 \left(-\frac{1}{R_2} \right) + U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{cases}$$

ESEMPIO:



$$\begin{cases} i_2 = g_{11} \cdot U_1 + g_{12} \cdot U_2 + I_d \rightarrow \text{equivalente Norton} \\ i_2 = g_{21} \cdot U_1 + g_{22} \cdot U_2 + I_d \rightarrow \text{equivalente Norton} \end{cases}$$

$$I_d = i_2 \mid U_1 = 0, U_2 = 0 = \frac{E}{R_1}$$

$$I_d = i_2 \mid U_1 = 0, U_2 = 0 = 0$$

$$i_2 = i_b - i_a$$

$$i_a = \frac{E}{R_1}$$

$$i_b = 0 \quad \text{perché} \quad V_{23} = 0$$

Quindi:

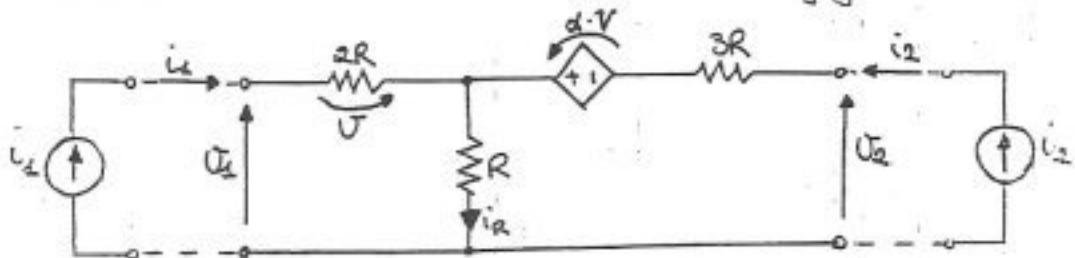
$$i_d = -\frac{E}{R_1}$$

$$i_2 = -i_b = 0$$

Corrente Equivalente
Norton

ESEMPIO:

Determinare U_1 e U_2 dato il circuito di figura:



le grandezze che "spingono" sono I_1 e I_2 ; potremmo fare la sovrapposizione degli effetti, ma proseguiamo ora con l'analisi diretta:

$$U = -i_1 \cdot 2R$$

$$i_R = i_1 + i_2$$

A questo punto conosciamo tutte le grandezze, soprattutto sappiamo l'espressione di tutte le correnti in funzione di quelle imposte. Per cui possiamo scrivere

$$U_1 = i_1 \cdot 2R + (i_1 + i_2) R = i_1 (3R) + i_2 \cdot R$$

$$\begin{aligned} U_2 &= i_2 \cdot 3R + i_1 \cdot 2R \cdot \alpha + (i_1 + i_2) \cdot R = \\ &= i_1 (2R \cdot \alpha + R) + i_2 \cdot GR \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto:

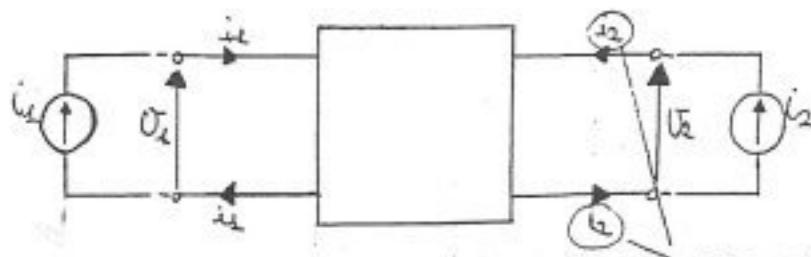
$$R = \begin{bmatrix} 3R & R \\ 2R\alpha + R & GR \end{bmatrix}$$

Come si può vedere non c'è più RECIPROCAZIA. Questo dovuto alla presenza del generatore pilotato nella rete.

Facciamo un breve ripasso su quanto detto sulle nei rappresentazioni possibili dei bipoli AFFINI.

- rappresentazione a parametri R (prendiamo le due "i" alle porte come variabili indipendenti)

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 + E_1 \\ V_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 + E_2 \end{cases} \rightarrow \text{termini noti}$$



ecco perché si può chiamare PORTA ELETTRICA

Abbiamo così imposto i generatori di corrente.

R_{11} e R_{22} sono gli EFFETTI LOCALI alle porte

R_{12} e R_{21} sono gli EFFETTI NON LOCALI alle porte, e nel caso in cui essi siano UGUALI, si dice che la rete ha un comportamento RECIPROCO (i₂ agisce sulla porta 1 e vice i₁ agisce sulla porta 2)

Ma supponiamo ora il problema inverso, cioè date una matrice dei parametri, ricaviamo Triviose il circuito di origine?

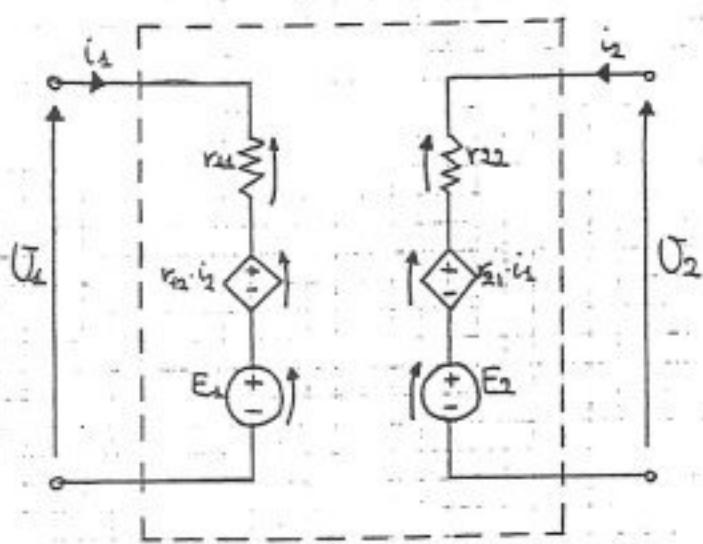
→ CIRCUITO EQUIVALENTE CON RAFFRESENTAZIONE A PARAMETRI R

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 + E_1 \\ V_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 + E_2 \end{cases}$$

Osserviamo ad esempio l'equazione

$$V_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 + E_1$$

possiamo notare che è una somma di tensioni, quindi equivalenti a Triviose il circuito equivalente di Thévenin.



$$U_1 = r_{11} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2 + E_1$$

contributo
locale

contributo
non locale

$$U_2 = r_{22} \cdot i_1 + g_{21} \cdot i_2 + E_2$$

contributo
non locale

contributo
locale

→ CIRCUITO EQUIVALENTE CON RAPPRESENTAZIONE A PARAMETRI G

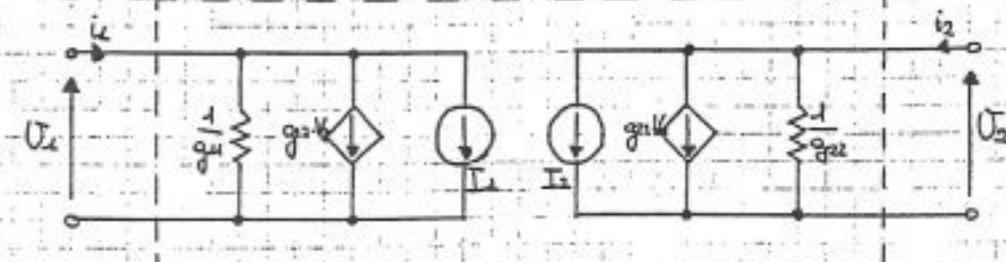


$$\begin{cases} i_1 = g_{11} \cdot U_1 + g_{12} \cdot U_2 + I_1 \\ i_2 = g_{21} \cdot U_1 + g_{22} \cdot U_2 + I_2 \end{cases}$$

Osserviamo ad esempio l'equazione:

$$i_1 = g_{11} \cdot U_1 + g_{12} \cdot U_2 + I_1$$

possiamo notare che è una somma di correnti, quindi
equivale a trarre il circuito equivalente di Norton:



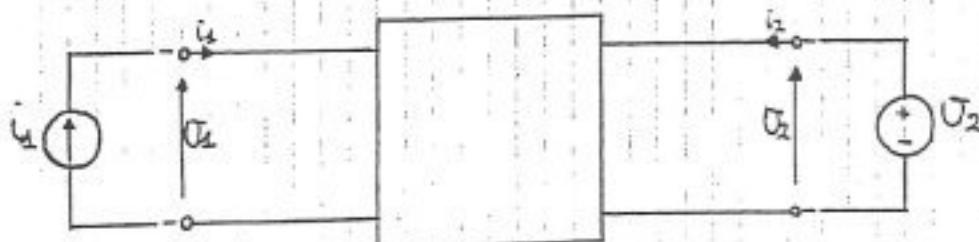
$$i_1 = g_{11} \cdot U_1 + g_{12} \cdot U_2 + I_1$$

locale non locale

$$i_2 = g_{21} \cdot U_1 + g_{22} \cdot U_2 + I_2$$

locale non locale

→ CIRCUITO EQUIVALENTE CON RAPPRESENTAZIONE A PARAMETRI H



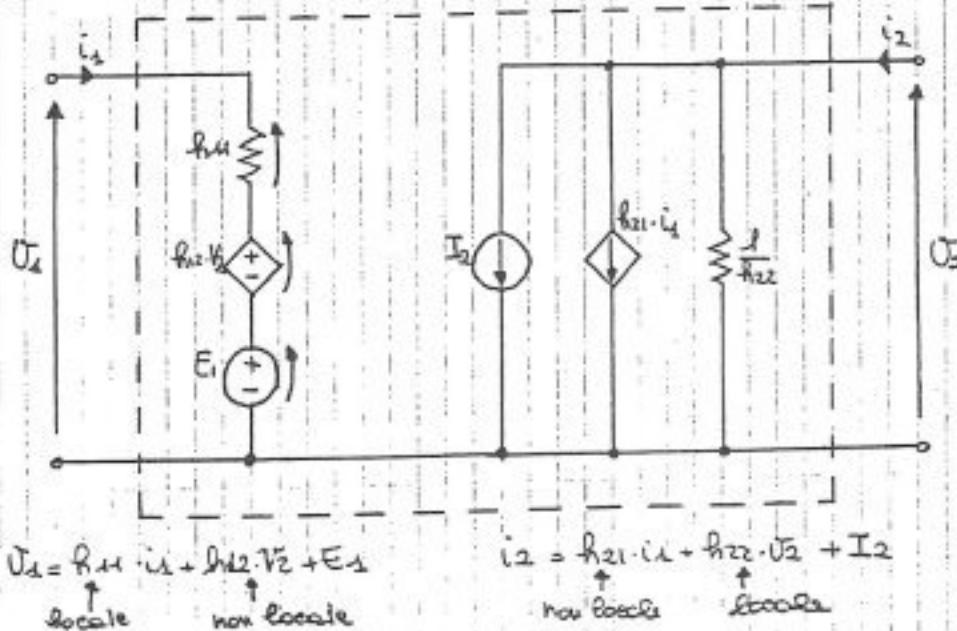
In questo caso mi impone la corrente alla porta 1 mentre mi impone la tensione alla porta 2:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot U_2 + E_1 \\ i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot U_2 + I_2 \end{cases}$$

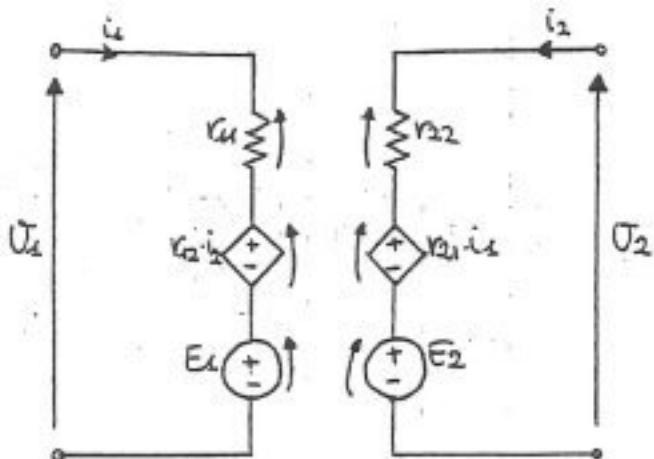
L'equazione: $U_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot U_2 + E_1$ è di tipo serie, quindi equivale a Trovare l'equivalente Thévenin;

L'equazione: $i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot U_2 + I_2$ è di tipo parallelo, quindi equivale a Trovare l'equivalente Norton.

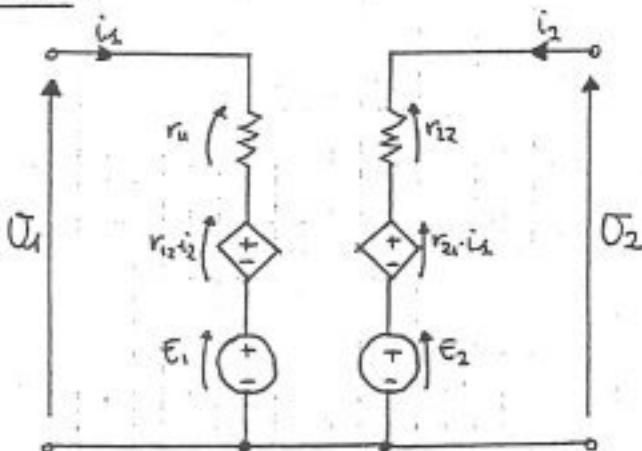
Rappresentandoli:



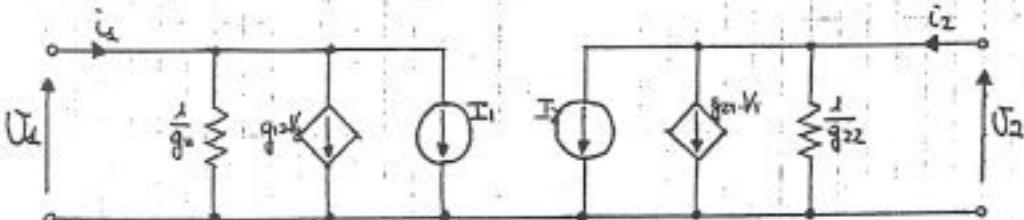
Ma torniamo un attimo alla rappresentazione equivalente con i parametri R:



I due circuiti sono elettricamente disaccoppiati. Ma generalmente, se dato dalle specifiche, essi sono elettricamente ACCOPPIATI:

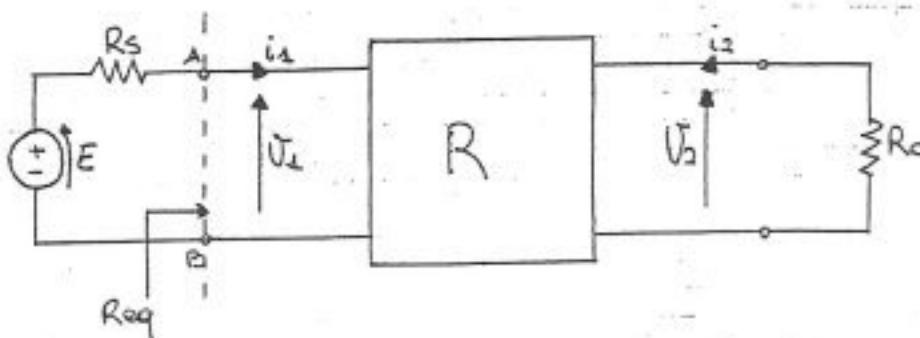


Nei circuiti MOS e negli AMPLIFICATORI generalmente i circuiti sono di questo tipo. Raro il caso in cui i circuiti siano disaccoppiati. Lo stesso discorso vale anche nel caso:



ESEMPIO:

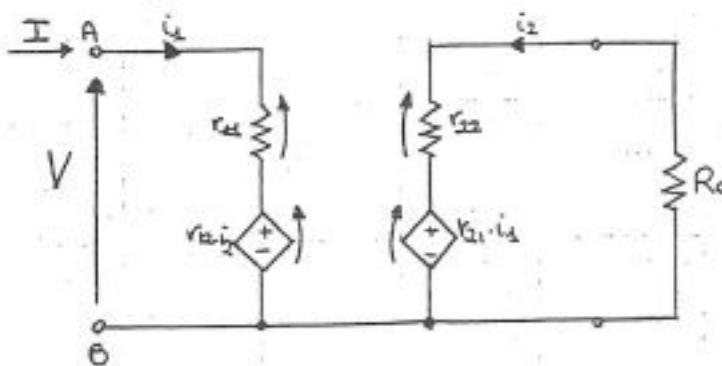
Del doppio bipolo di figura è data la rappresentazione su parametri R , collegato a R_o ed a $E - R_S$:



$$R \begin{cases} V_1 = r_{11} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2 \\ V_2 = r_{21} \cdot i_1 + r_{22} \cdot i_2 \end{cases}$$

Si vuole determinare la R_{eq} tra A e B (cioè Trovare l'equivalente di Thévenin o Norton).

Portiamo sul disegnate il circuito equivalente:



Dobbiamo Trovare la R_{eq} tra A e B. Di generatori indipendenti non ne sono presenti nella rete, quindi le correnti a vuoto e la tensione di cortocircuito sono uguali a zero.

Se imponiamo I , conosciamo i_1 quindi:

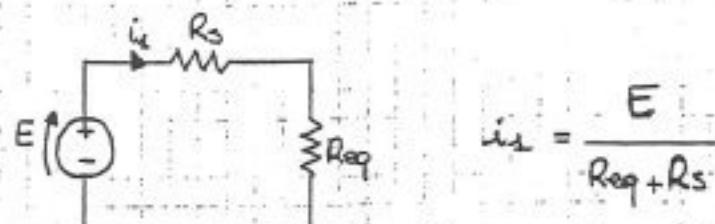
$$i_1 = I$$

$$i_2 = -\frac{(r_{21} \cdot I)}{r_{22} \cdot R_o}, \text{ sostituendo: } V = I \cdot (r_{11}) + r_{12} \cdot \left(-\frac{r_{21} \cdot I}{r_{22} \cdot R_o} \right)$$

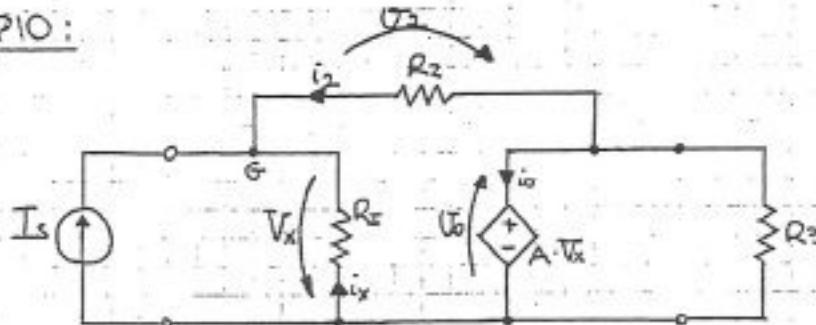
- Ricavando mi ottiene:

$$\frac{V}{I} = R_{eq} = r_{11} - \frac{r_{12} \cdot r_{21}}{r_{22} + R_o}$$

Sulla Tralata è la Req della rete, per cui ora possiamo disegnare il circuito equivalente e trovarne le:



ESEMPIO:



Per incognite consideriamo V_x , in quanto conoscute essa siamo in grado di determinare tutte le tensioni:

- facciamo le KCL al modo G:

$$\frac{V_x}{R_1} + \frac{V_x(1+A)}{R_2} = -I_s$$

$$V_x = V_x + A V_x$$

$$= V_x (1+A)$$

$$V_x = - \frac{I_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{(1+A)}{R_2}}$$

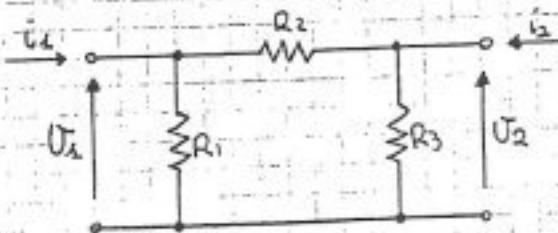
Una volta che vedremo l'amplificatore operazionale, potremo verificare che:

$$V_o = \frac{A \cdot (I_s)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1+A}{R_2}}$$

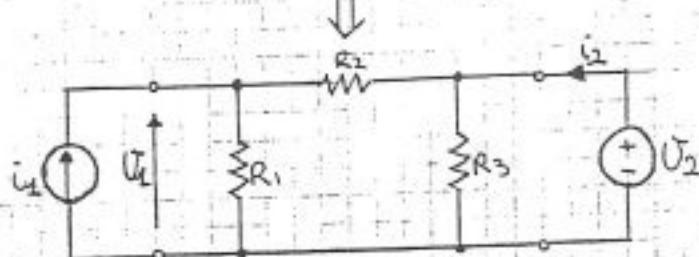
$$\text{per } A \rightarrow \infty \quad V_o = -I_s R_2$$

ESEMPIO:

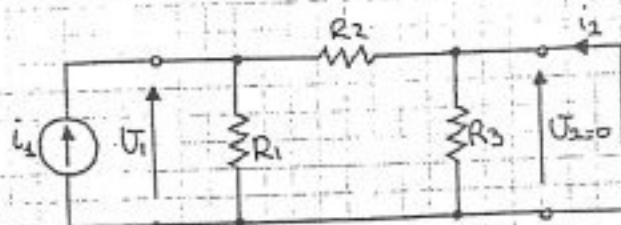
Trovare i parametri H delle seguenti reti



$$H \left\{ \begin{array}{l} U_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot U_2 \\ i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot U_2 \end{array} \right.$$



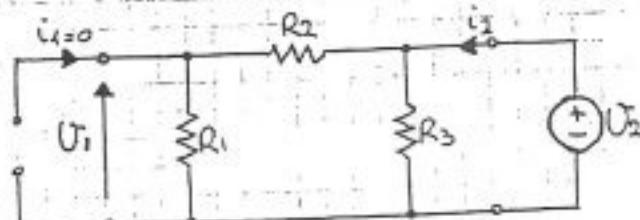
→ Calcolo di h_{11} e h_{12}



$$\rightarrow h_{11} = \frac{U_1}{i_1} \Big|_{U_2=0} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow h_{12} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{U_2=0} = - \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

→ Calcolo di h_{21} e h_{22}



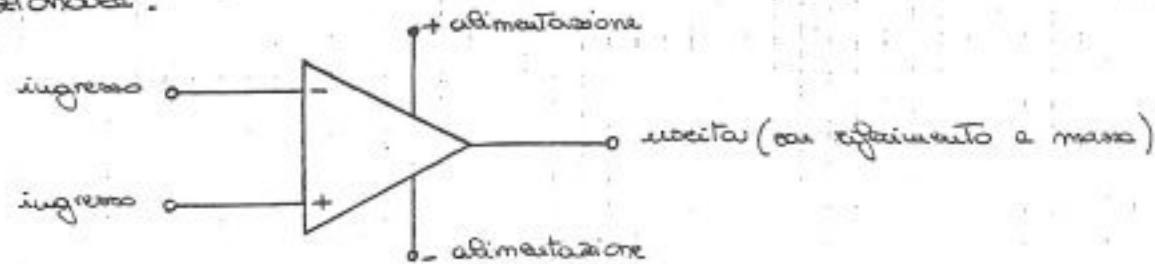
$$\rightarrow f_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{R_1}{R_1+R_2} = -f_{21}$$

$$\rightarrow f_{22} = \frac{i_2}{U_2} \Big|_{i_1=0} = \left(\frac{U_2}{R_3} + \frac{U_2}{R_1+R_2} \right) = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1+R_2}$$

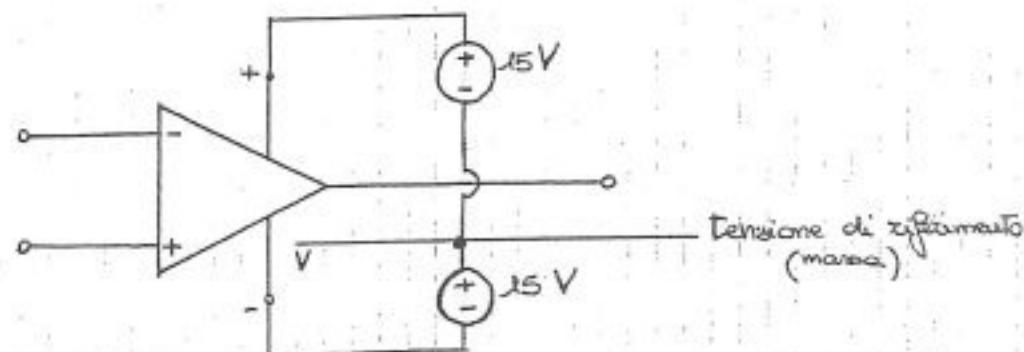
$$H = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}$$

AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

In elettronica un componente molto utilizzato è l'amplificatore operazionale.

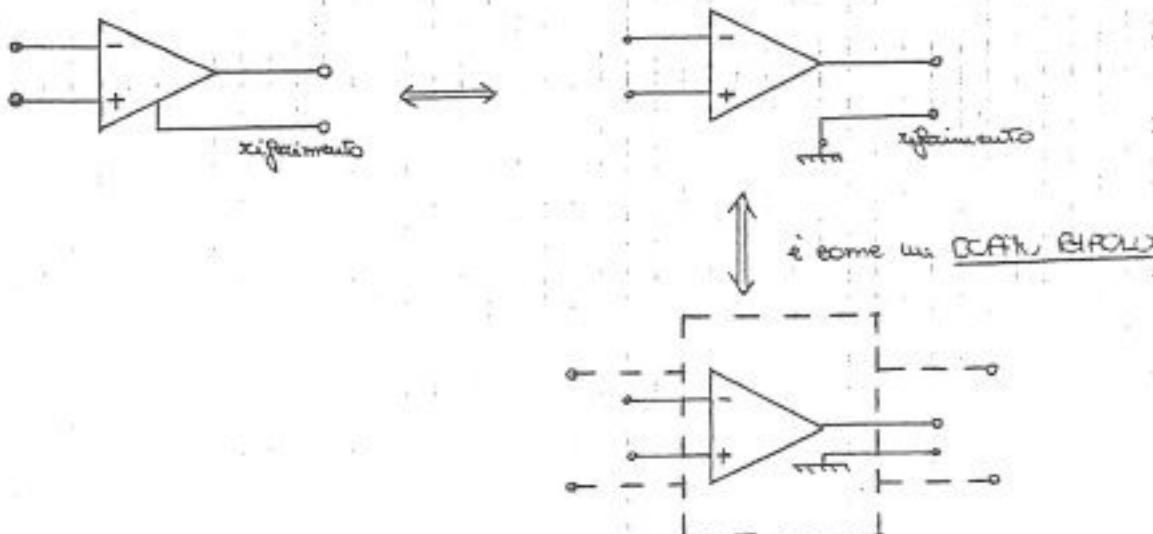


Possiamo notare che è dotato di 5 morsetti; due di essi servono per "dati vita" al componente, cioè sono i collegati all'alimentazione (rispettivamente +15V e -15V):

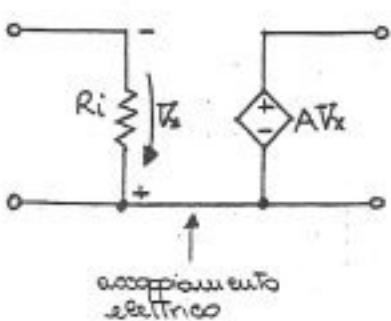


Tramite le batterie polarizziamo l'amplificatore, cioè lo portiamo ad un buon punto di lavoro. I segnali su cui esso lavora sono immessi sugli altri 2 morsetti (+ e -)

In elettronica viene semplicato come:



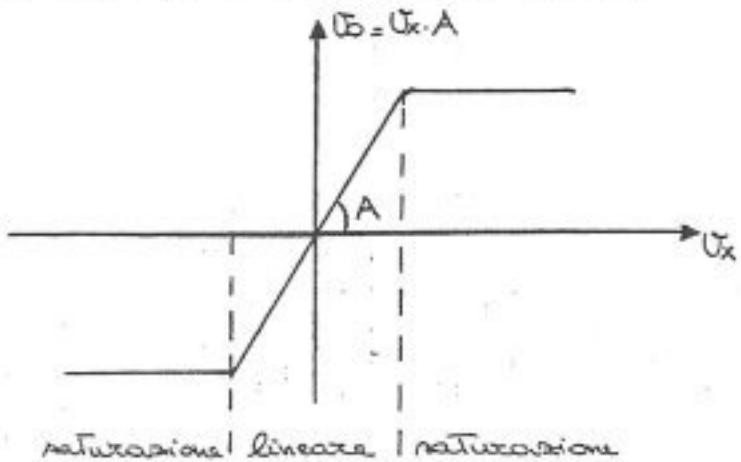
Il circuito equivalente è fatto in tal modo:



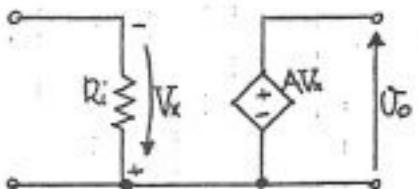
→ Questo è il modello dell'amplificatore operazionale, in una certa zona di funzionamento.

→ R_i è la resistenza d'ingresso equivalente per quale è MOLTO grande. In tal modo per piccoli correnti ho tensioni molto elevate.

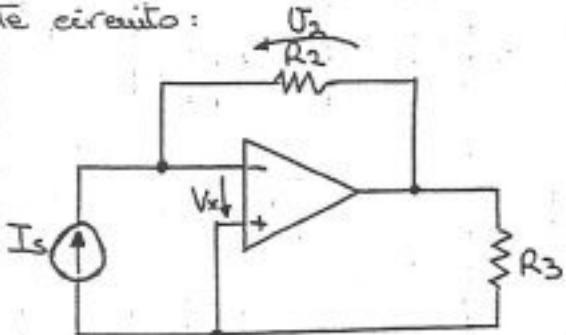
Nella realtà: (nella sua corta regione)



Noi analizziamo la regione in cui l'operazionale lavora in modo lineare, il cui modello è:



La rete analizzata nell'esempio precedente era modellizzabile con il seguente circuito:



Risolvendolo con lo stesso metodo prima, troviamo ancora V_x allo stesso modo di prima. Ma A è molto grande ($\approx 10^5$), allora

$$U_x = - \frac{I_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1+A}{R_2}}$$

Se facciamo il limite per una A molto grande:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} U_x = 0$$

Noi abbiamo retroazione, cioè abbiamo collegato l'uscita al morsetto negativo "-" tramite la resistenza R_2 (retroazione negativa), quindi per $A \rightarrow \infty$ $V_x \rightarrow 0$, perciò anche:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} i_x = 0$$

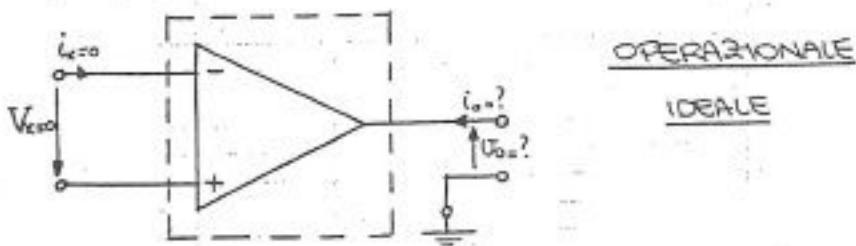
Se V_x e i_x vanno a zero, la V_o in uscita vale:

$$V_o = A \cdot U_x \quad U_x \rightarrow 0 \quad A \rightarrow \infty$$

quindi V_o è uguale a 0∞ , cioè una forma indeterminata.

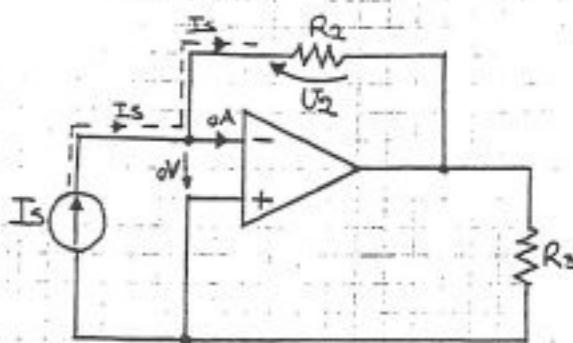
$$\begin{cases} i_o = ? \\ V_o = ? \end{cases}$$

Perciò per $A \rightarrow \infty$ l'operazionale viene modellato con un doppio bipolo fatto in tal modo:



In questo caso singolare, tutte le relazioni riguardano solamente la porta d'ingresso, in quanto sulla porta d'uscita non possiamo dire nulla.

Ma torniamo ora al circuito precedente, e proviamo ad analizzarlo avendo fatto queste considerazioni sull'amplificatore operazionale.



Manteniamo l'ipotesi che l'amplificatore sia ideale.
La corrente i in ingresso è = 0 in quanto è presente la tensione negativa i e ciò comporta che la tensione in ingresso è = 0 (anche se bisogna affrontare che l'impedenza d'ingresso in realtà non è ∞).

Il comando tende a 0 quando $A \rightarrow \infty$ ed è retroazionato
Ma risolviamo la rete:

I_s circola esclusivamente su R_2 in quanto la corrente i entra nell'amplificatore è = 0.

Fatta queste considerazioni, vediamo che la $U_2 = U_o$, perché se poniamo la maglia verde —, ottieniamo:

$$U_2 + U_o = 0$$

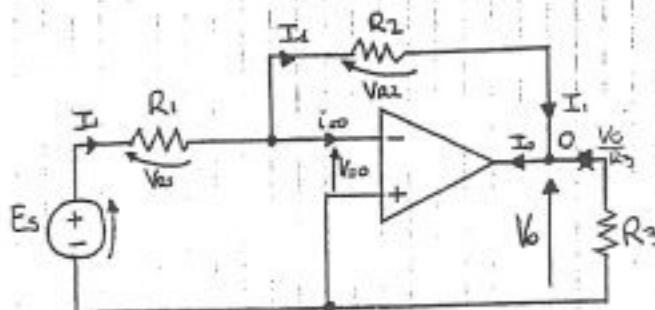
$$+ I_s R_2 + U_o = 0$$

$$U_o = R_2 (-I_s)$$

, a meno del segno le due tensioni coincidono.

ESEMPIO:

Dato il circuito con l'operazionale ideale trofare tutte le grandezze.



$$I_1 = \frac{E_s}{R_1}$$

La corrente I_1 è poi quella che circola anche su R_2

$$V_{R2} = R_2 \cdot I_1 = R_2 \cdot \frac{E_s}{R_1} = \frac{R_2 \cdot E_s}{R_1}$$

Tramite la KVL troviamo che:

$$V_o + V_{R2} = 0$$

$$V_o = -V_{R2}$$

Dalle quale, sostituendo, troviamo che:

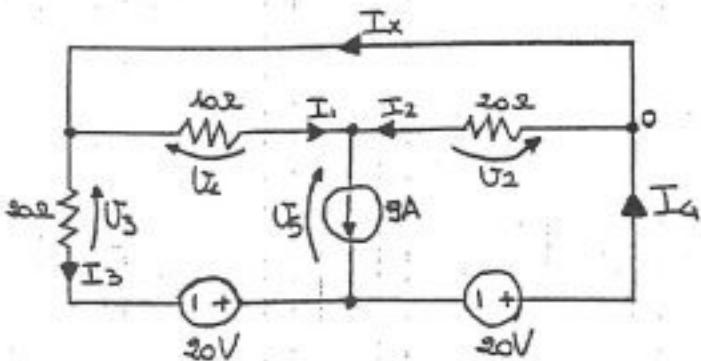
$$V_o = -E_s \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

L'amplificatore operazionale in queste vite è un amplificatore INVERTENTE.

Questo significa che l'uscita è proporzionale alla tensione d'ingresso cambiata di segno, ed anche al rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ che "AMPLIFICA" E_s .

A questo punto possiamo calcolare I_o , applicando la KCL al nodo 0.

$$I_o = I_1 - \frac{V_o}{R_3} = \frac{E_s}{R_1} + \frac{(E_s \cdot \frac{R_2}{R_1})}{R_3}$$

ESEMPIO:

Determinare I_x

Tramite la KVL alla maglie, possiamo vedere che:

$$U_1 - U_2 = 0 \rightarrow U_1 = U_2$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$I_1 = 9A \cdot \left(\frac{10}{10+20} \right) 2 = 6A$$

$$I_2 = 9A \cdot \left(\frac{20}{10+20} \right) 2 = 3A$$

Ora possiamo Trovare U_3 tramite la KVL:

$$U_3 = 20V + 20V = 40V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{20\Omega} = 2A$$

Ora possiamo Trovare Tutte le grandezze del circuito:

$$\rightarrow I_x = I_1 + I_3 = 6 + 2 = 8A$$

$$\rightarrow I_4 = I_x + I_2 = 8 + 3 = 11A$$

$$\rightarrow U_5 = V_0 - V_2 = 20 - (3 \cdot 20) = -40V$$

$$\rightarrow P_{5\text{ASS.}} = U_5 \cdot I = |-40 \cdot 9| = 360W$$

$$i_1 = \frac{2}{10} \cdot \frac{40}{40+120} = \frac{1}{20} \text{ A}$$

A questo punto possiamo Trovare la d.d.p. del generatore
in pilota:

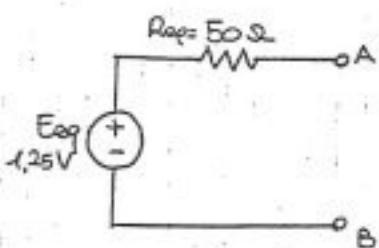
$$U_2 = 50 \cdot i_1 = 50 \cdot \frac{1}{20} = 2,5 \text{ V}$$

Essendo ora due resistenze in serie di ugual valore possiamo applicare il portatore di Tensione per Trovare U_{AB} :

$$U_{AB} = \frac{U_2}{2} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ V} = E_{eq}$$

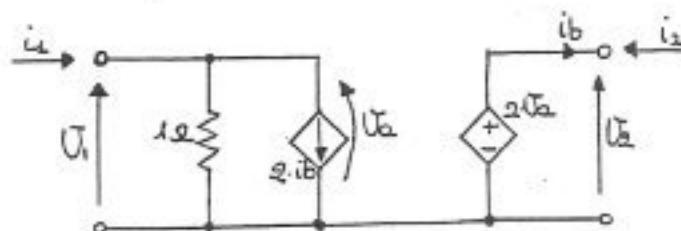
↑
perché sono 2 resistenze uguali

L'equivalente Thévenin ottenuto è dunque:



ESEMPIO:

Determinare i parametri R della rete:

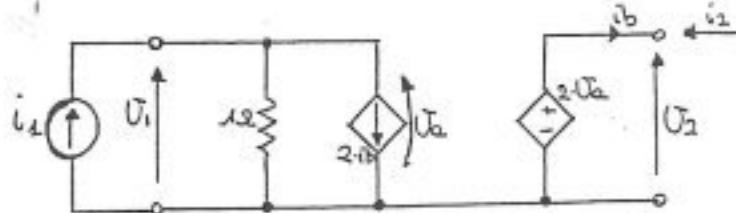


$$\begin{cases} U_2 = r_{12} \cdot i_1 + r_{22} \cdot i_2 \\ U_1 = r_{21} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2 \end{cases}$$

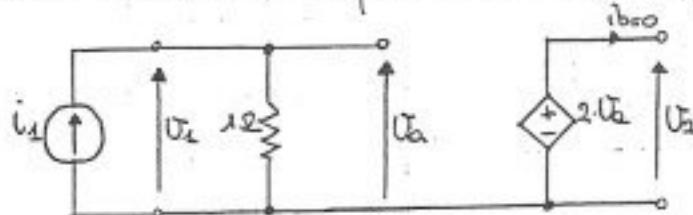
→ Calcolo dei parametri r_{12} e r_{21}

$$r_{12} = \frac{U_1}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$

$$r_{21} = \frac{U_2}{i_1} \Big|_{i_2=0}$$



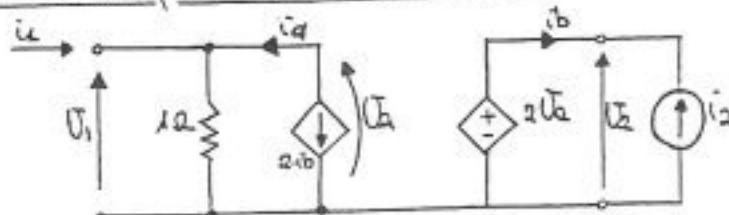
Osservando il circuito, si può vedere che sul filo che accoppia i due circuiti non passa corrente, pertanto $i_b = 0$. Essendo $i_b = 0$, anche il comando del generatore pilottato è uguale a 0, quindi il circuito equivalente è il seguente:



$$\rightarrow r_{12} = \frac{U_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{i_1 \cdot (12)}{i_1} = 12 \Omega$$

$$\rightarrow r_{21} = \frac{U_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{2i_b \cdot R}{i_1} = \frac{2(i_1 \cdot R)}{i_1} = 2R = 2 \Omega$$

→ Calcolo dei parametri r_{12} e r_{21}



$$r_{12} = \frac{U_1}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$r_{22} = \frac{U_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

Per analizzare il circuito valgono praticamente le stesse osservazioni fatte per il caso precedente, quindi possiamo già scrivere le equazioni necessarie per determinare i parametri.

$$\rightarrow r_{12} = \frac{U_1}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$i_b = -i_2$$

$$i_d = 2 \cdot i_2$$

$$U_d = (2 \cdot i_2) \cdot 1$$

$$r_{12} = \frac{U_1}{i_2} = \frac{2 \cdot 1}{i_2} = 2 \Omega$$

$$\rightarrow r_{22} = \frac{U_2}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$

$$U_d = 2 \cdot U_a = 2 \cdot U_2 = 2 \cdot 2 i_2 = 4 i_2$$

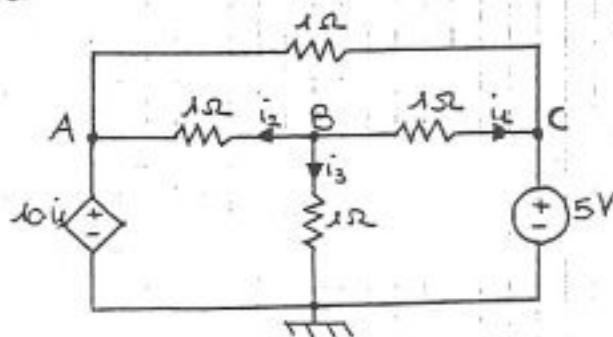
$$r_{22} = \frac{U_2}{i_2} = \frac{-4 \cdot i_2}{i_2} = 4 \Omega$$

Pertanto possiamo scrivere la matrice dei parametri R.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO:

Applicando l'analisi nodale risolvete il seguente circuito.



$$V_C = 5 \text{ V}$$

$$V_A = 10 \cdot i_A \text{ V}$$

$$V_C = x \text{ V}$$

$$i_1 = \frac{x - 5}{1} \quad \frac{V_B - V_C}{R}$$

$$i_2 = \frac{x - 10 \cdot i_A}{1} = x - 10(x - 5) = -9x + 50$$

$$\frac{V_B - V_A}{R}$$

Applicando la KCL al nodo B

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Che sostituendo risulta essere:

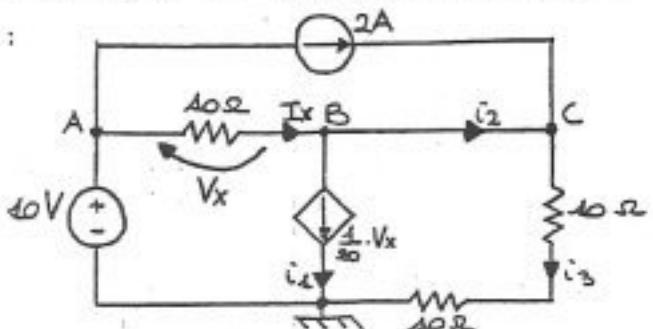
$$\left(\frac{-9x + 50}{1} \right) + \left(\frac{x}{1} \right) + \left(\frac{x - 5}{1} \right) = 0$$

$$\downarrow \\ -7x + 45 = 0$$

$$\downarrow \\ V_B = x = \frac{45}{7} = 6,42 \text{ V}$$

ESEMPIO:

Data la rete, risolvere il circuito assumendo come incognita la variabile I_x :



Se prendiamo come incognite una o più correnti, dobbiamo scrivere le tensioni nelle equazioni. Peranto portiamo ora col risolvere il circuito mettendo tutte le grandezze dello stesso tipo in funzione di I_x :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{20} \cdot V_x = \frac{1}{20} (I_x \cdot 10) = \frac{I_x}{2} \\ i_2 = I_x - \frac{I_x}{2} - \frac{I_x}{2} \\ i_3 = i_2 + 2A = \frac{I_x}{2} + 2A \end{cases}$$

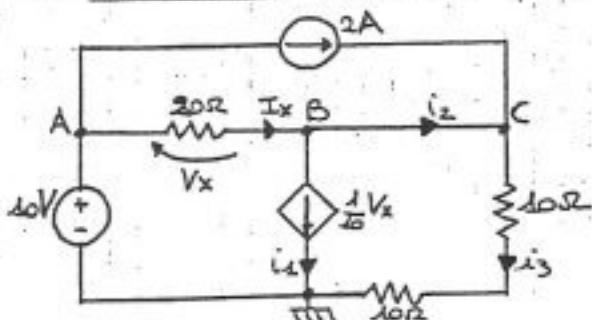
Ora conosciamo tutte le correnti, quindi cerchiamo le mad per trovare le tensioni: percorriamo la maglie ABCA, composta solo bipoli controllabili in corrente:

$$i_3 \cdot 20 + I_x \cdot 10 = 40$$

$$\left(\frac{I_x}{2} \cdot 2 \right) \cdot 20 + 10 I_x = 40$$

$$20 I_x = 40 - 40 \Rightarrow I_x = -\frac{3}{2} A = -1.5 A$$

→ Cosa partendo: se avessimo scelto $R=20\Omega$ e $\frac{1}{10} V_x = 10$ sarebbe stato un caso IMPOSSIBILE. Vediamo perché:



Sostituendo i nuovi valori nell'equazione ottenuta:

$$-10 I_x + 40 + 10 I_x = 40 \quad \underline{\text{IMPOSSIBILE}}$$

SEGNALI SINUSOIDALI

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Finoora abbiamo considerato generatori in cui tensione e corrente sono costanti nel tempo. Ora considereremo segnali variabili di tipo sinusoidale (segnali che variano nel tempo). Il segnale variabile potrà essere una tensione o una corrente.

X_m : ampiezza o valore massimo o valore di picco

ω : pulsazione o frequenza angolare

φ : fase

Quindiciene caratteristiche dei segnali sinusoidali sono:

→ PERIODO:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [\text{sec}]$$

→ FREQUENZA:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}] = [\text{rec}^{-1}]$$

→ PULSAZIONE:

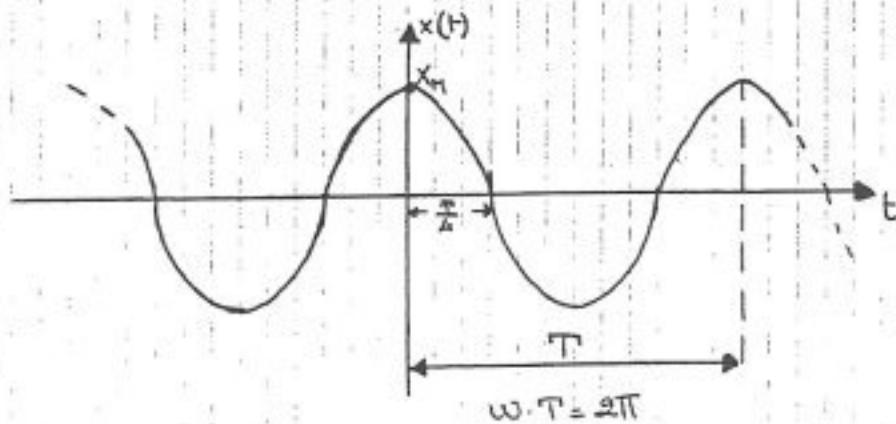
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{rad/sec}]$$

$$\omega = 2\pi f \quad [\text{rad/sec}]$$

Cerchiamo di capire il loro significato

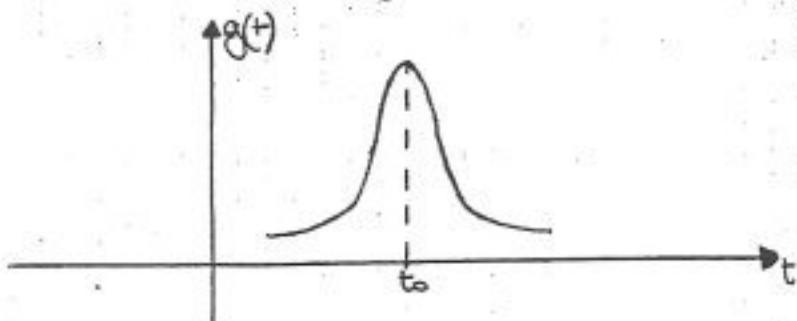
→ Prendiamo il caso in cui $\varphi = 0$, cioè

$$x(t) = X_m \cos \omega t$$

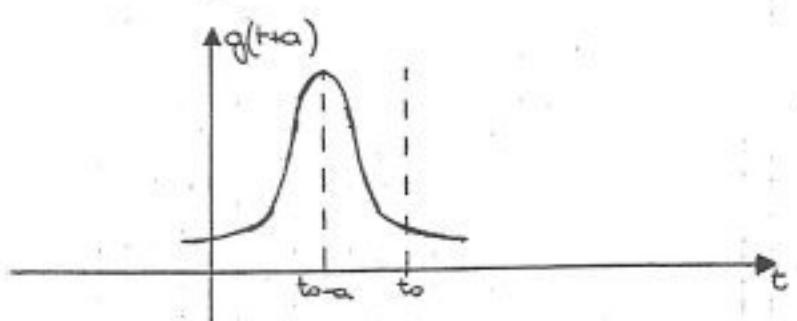


Ma quale significato ha la fase φ ? Per comprenderelo facciamo questo percorso:

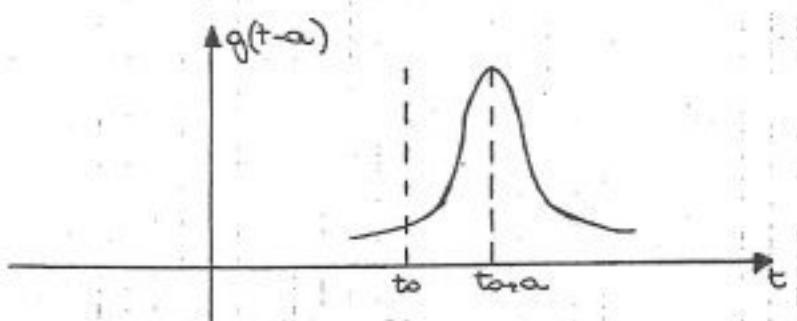
prendiamo in esame il generico grafico di $g(t)$:



Considerando il grafico di $g(t)$ determiniamo il grafico di $g(t+a)$.



Quando $t+a = t_0$, avremo il nuovo massimo della funzione in $t=t_0-a$. La funzione è stata "anticipata" di a .

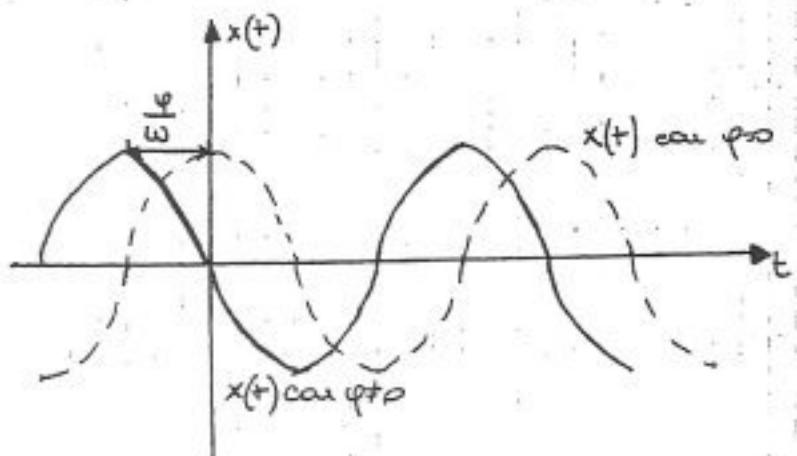


Medesimo discorso per $t-a = t_0$, nuovo massimo in: $t=t_0+a$. La funzione è stata "ritardata" di a .

A questo punto possiamo ritornare alla sinosside per comprendere il significato di φ :

$$x(t) = x_n \cdot \cos \left[\omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right]$$

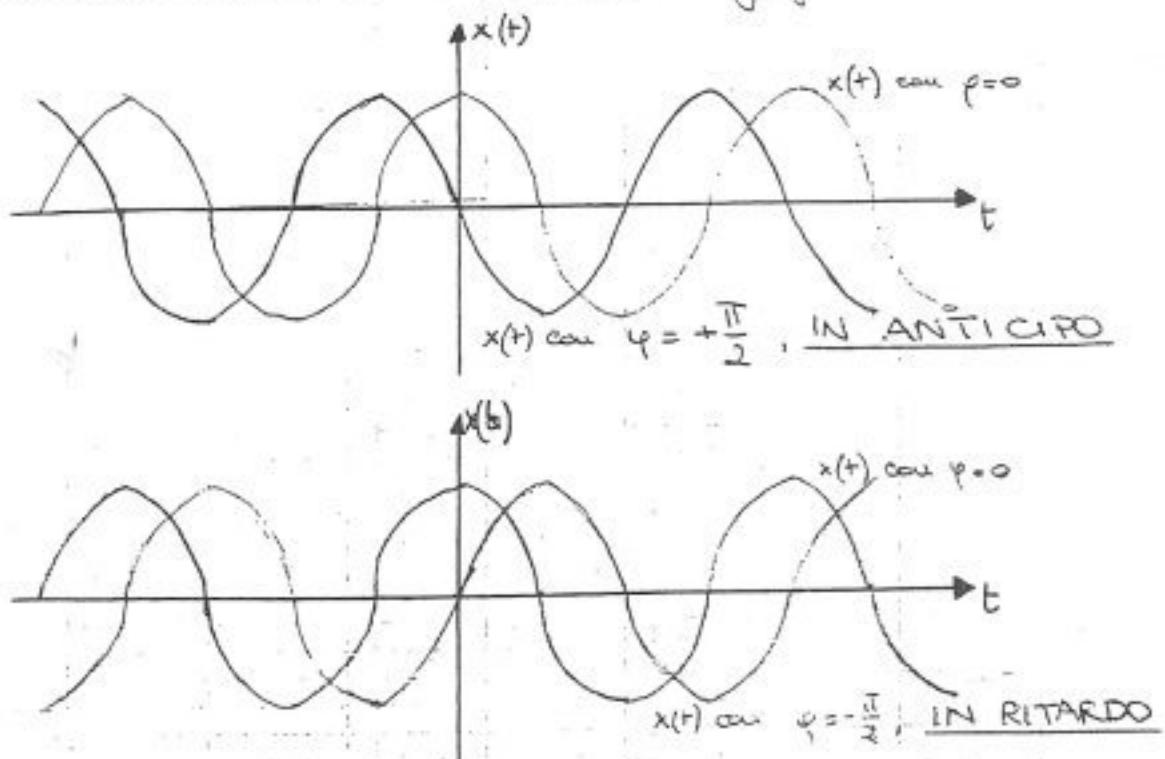
Questo è il $t+a$ di prima, dato $a = \frac{\varphi}{\omega}$



Vediamo ora il caso particolare in cui lo sfasamento sia di $\frac{1}{4}$ di periodo:

$$\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{4} \rightarrow \varphi = \omega \cdot \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Essendo il risultato positivo il segnale è in ANTICIPO di $\frac{\pi}{2}$; se il risultato fosse stato negativo il segnale sarebbe stato in RITARDO. Graficamente:



Importanti relazioni da ricordare sono:

$\cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$	$= \sin \omega t$
$\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$	$= \cos \omega t$

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

$$\rightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Dai queste ultime due equazioni, se le sommiamo, otteniamo la formula di prostaferesi:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

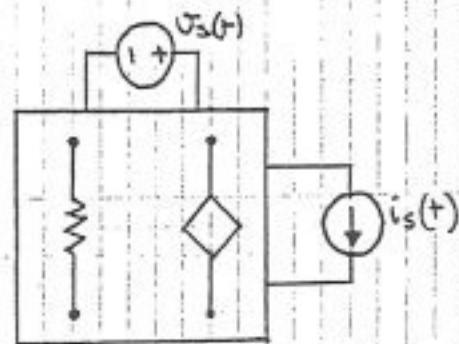
$$x_h \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

funzioni di x_h e φ

sviluppando

$$x_h : [\cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t] = (\underbrace{x_h \cdot \cos \varphi}_{A}) \cdot \cos \omega t + (\underbrace{x_h \cdot \sin \varphi}_{B}) \cdot \sin \omega t$$

CIRCUITI CON GENERATORI SINUSOIDALI

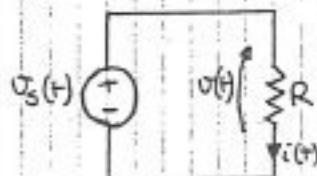


Per la legge di Ohm:

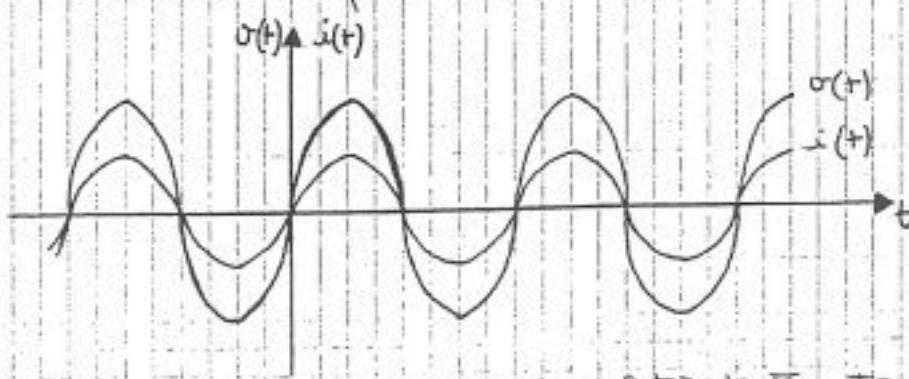
$$\sigma(t) = R \cdot i(t)$$

La relazione è un legame tra i valori istantanei di tensione e corrente.

ESEMPIO:

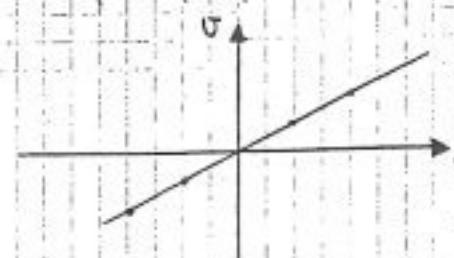


Essendo $\sigma(t) = R \cdot i(t)$ ed essendo $R > 0$, i grafici che otterremmo di $\sigma(t)$ e $i(t)$ saranno pressoché simili ad eccezione dell'ampiezza massima:



Le due sinusoidi sono in fase, cioè entrambe sono a σ o a valore massimo contemporaneamente.

Pertanto c'è sempre proporzionalità diretta tra σ ed i su R .



Su questi circuiti salgono anche le P.S.E., Thévenin e Norton.

Infatti possiamo dire che

$$A \cdot x(t) = b(t)$$

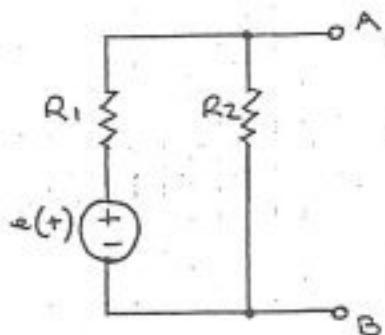
$$x(t) = h_1 \cdot u_S(t) + k_1 \cdot i_S(t)$$

E' dato nuovamente dalla combinazione lineare delle grandezze nel tempo.

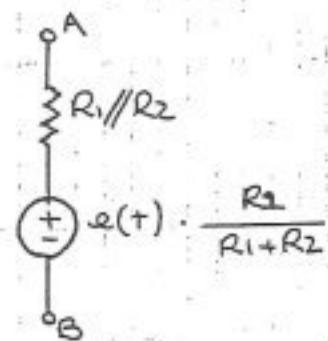
Pertanto se vale il principio di sovrapposizione degli effetti, valgono anche i Teoremi di Thévenin e Norton.

ESEMPIO:

Dato il circuito con il generatore sinusoidale $e(t) = E_0 \cos \omega t$ trovare l'equivalente di Thévenin ai morsetti A-B.



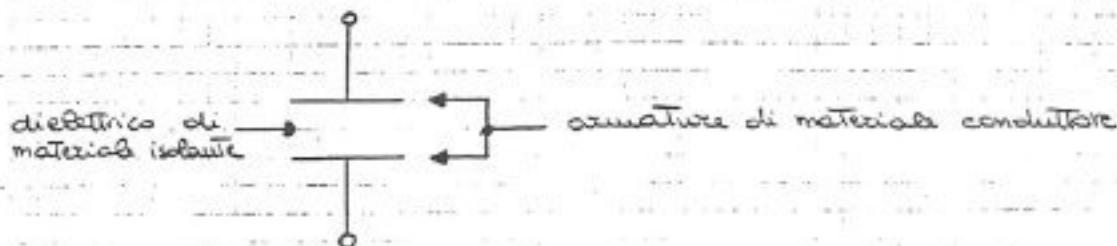
Procedendo nel medesimo modo di come si abbia sempre fatto fino ad ora, possiamo ricavare:



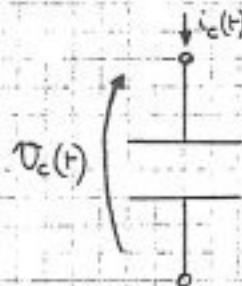
ELEMENTI CIRCUITALI DINAMICI

Introduciamo i due elementi circuitali dinamici CONDENSATORE e INDUTTORE.

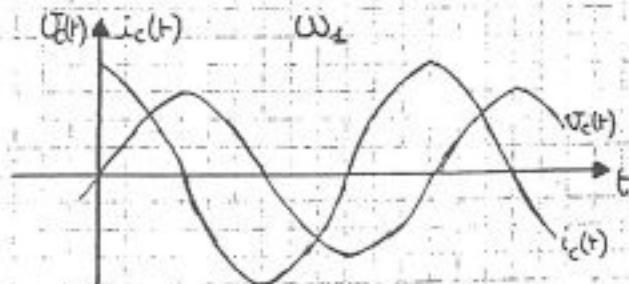
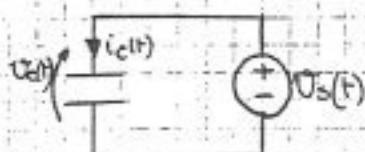
CONDENSATORE



Possiamo vedere questo elemento ancora come un bipolo, sul quale misurare una corrente e una tensione:

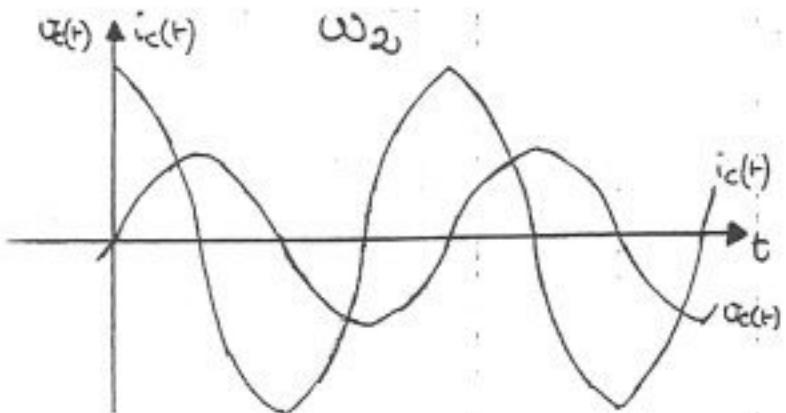


Analizziamo ora le forme d'onda



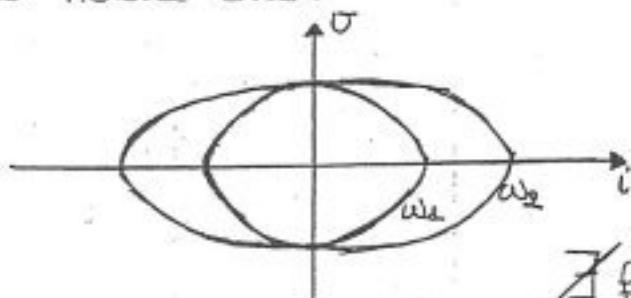
Come si può notare i_c e V_c sono sfasate, ed in particolare i_c è in anticipo rispetto a V_c .

Possiamo agire sui due segnali modificando il periodo del segnale d'ingresso $V_s(t)$, riferendo poi i mutui andamenti temporali delle grandezze. Possiamo ad esempio ad accorciare il periodo, in altre parole andare ad aumentare la pulsazione ω .



Possiamo notare che all'aumentare della pulsazione ω (da ω_1 a ω_2), la i_C a parità di V_C continua a crescere.

Ma provando a tracciare le caratteristiche corrente-tensione possiamo notare che:



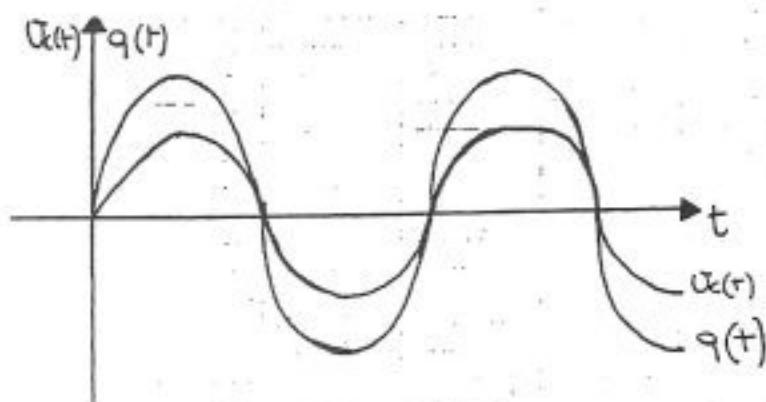
$$f(V_C(t), i_C(t)) = 0$$

non c'è più cioè legame tra
 V_C e i_C

Per risolvere questo problema, introduciamo la CARICA ELETTRICA:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$f(q, V_C) = 0$$



Bisogna notare che c'è una legge di proporzionalità tra la corrente $i_c(t)$ e la tensione $U_c(t)$. Per questo possiamo scrivere:

$$q(t) = C \cdot U_c(t)$$

dove C è il fattore di proporzionalità, detto CAPACITÀ del condensatore.

C = capacità [F]: farad

Quindi, per quanto detto in precedenza, avremo a sentire:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dQ(t)}{dt}$$

La forma di scrittura del tipo comandato in Teoria

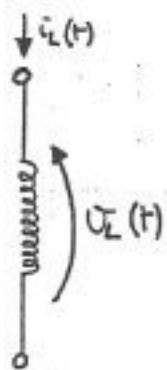
Moltiplichiamo ambo i membri per dt e poi integrando:

$$\int_{t_0}^t i_c(\tau) d\tau = C \cdot \int_{t_0}^t dU_c(\tau)$$



$$U_c(t) = U_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\tau) d\tau$$

INDUTTORE



Introduciamo il flusso:

$$\phi(t) = \int_0^t U_L(\tau) d\tau$$

flusso del campo magnetico concatenato con la spira

$$\phi(t) = L \cdot i_L(t)$$

Pertanto, andando avanti si trovi:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = U_L(t)$$

↓

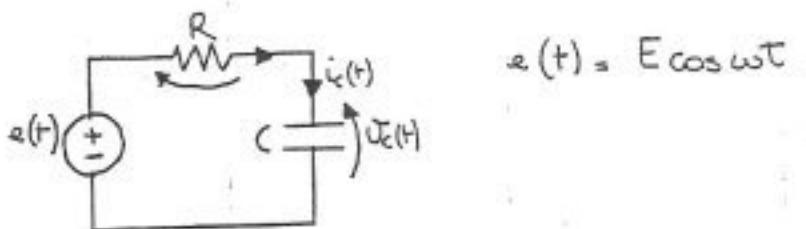
$$U_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

In cui:

L = induttanza o autoinduttanza

$[H]$: Henry

IL REGIME SINUSOIDALE (A.C.)



$$e(t) = E \cos \omega t$$

Le grandezze che ci interessano sono le $v_c(t)$, portiamo le precedenti come variabili.

Applicando la KVL alle maglie:

$$v_c(t) + \underbrace{(R \cdot C) \cdot \frac{d v_c(t)}{dt}}_{i_c(t)} = E \cos \omega t \quad (\text{eq. differenziale})$$

Come soluzione dell'equazione differenziale abbiamo che:

$$v_c(t) = \underbrace{K \cdot e^{\lambda t}}_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0} + v_{cp}(t)$$

se $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0 \rightarrow$ quando ciò accade il termine $K e^{\lambda t}$ è un termine di transito rid. E dopo il transitorio esiste solamente $v_{cp}(t)$, cioè la soluzione particolare che è del tipo $E \cos \omega t$.

$$v_{cp}(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Vedremo che anche $i_c(t)$ sarà del tipo $\cos(\dots)$, quindi il sistema è al regime sinusoidale.

→ IPOTESI PERCHE' SI POSSA PARLARE DI REGIME SINUSOIDALE

→ circuito lineare

→ generatori devono essere tutti isofrequenziali (stessa ω)

→ le λ_i devono essere $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$

↑ pulsazione naturale del sistema

Sotto le 3 ipotesi, tutte le grandezze sono al regime sinusoidale.

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Ma possiamo descrivere le grandezze in termini di FASORE.
Vediamo come ottenere il fase di:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

FASORE:

$$\text{q.t' che } e \in \mathbb{C} \rightarrow \bar{x} = X_m \cdot e^{j\varphi} \quad \text{ricordiamo: } j = \sqrt{-1}$$

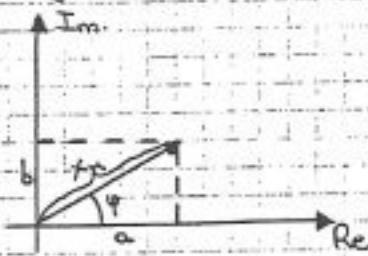
On questo modo viene espresso il segnale in forma polare.

Svolgendolo in forma cartesiana:

FASORE:

$$\bar{x} = X_m \cdot \cos \varphi + j X_m \sin \varphi = a + jb$$

Per rappresentare il fase, ci occorre del piano di Gauss:



Dato il numero complesso $\bar{x} = a + jb$ in forma cartesiana,
troviamo il modulo e la fase:

MODULO: $X_m = |\bar{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

FASE: $\varphi = \arg \bar{x} = \arctg \frac{b}{a} + \pi \text{ se } a < 0$

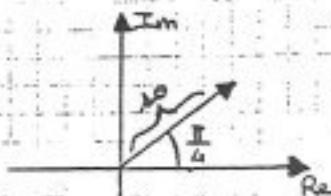
ESEMPIO: data la sinusode, trovere il fase-

$$v_s(t) = 10 \cdot \cos(100t + \frac{\pi}{4})$$

$$\bar{v}_s = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$= 10 \cos \frac{\pi}{4} + j 10 \sin \frac{\pi}{4} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + j 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{\sqrt{2}} (1+j)$$

Che facendo uno "schizzo" della rappresentazione si ottiene:



ESEMPIO :

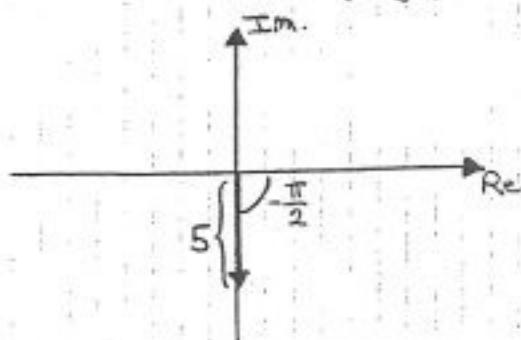
$$U_2(t) = 5 \cdot \sin(100t)$$

• Datoi la sinusoidale espressa come sin sen, la prima cosa che dobbiamo fare è riscrivere tale sinusoidale come cos:

$$U_2(t) = 5 \cdot \cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A questo punto possiamo scrivere il fasore:

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j5 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5j \end{aligned}$$



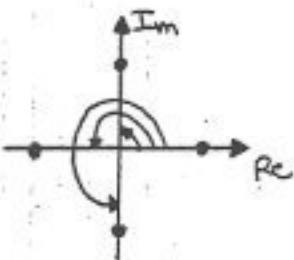
RICHIAMI TEORICI MATEMATICI:

$$e^{j0} = 1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j\pi} = -1$$

$$e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j$$



$$z_1 = a + jb \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$z_2 = c + jd$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + jb)(c + jd) = a \cdot c + (j)^2 b \cdot d + j(bc + ad) \\ &= ac - bd + j(bc + ad) \end{aligned}$$

Un altro modo per scrivere i numeri complessi è il seguente:

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$z_2 = |z_2| \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd} = \frac{ac + bd + j(bc - da)}{c^2 + d^2}$$

Se utilizziamo le forme polari il quoziente viene:

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Si ha ricordato anche che:

$$\frac{1}{j} = -j$$

ESEMPIO:

$$\bar{V}_3 = \frac{1+j}{1-j} \quad \omega = 10 \text{ rad/sec}$$

? $V_3(t)$

Possiamo risolvere il problema in due modi:

→ I° MODO (SCONSIGLIATO)

$$V_3 = \frac{1+j}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{(1+j)^2}{2} = \frac{1-1+2j}{2} = \frac{2j}{2} = j$$

$$|V_3| = 1$$

$$V_3(t) = 1 \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\angle V_3 = \frac{\pi}{2}$$

→ II° MODO (CONSIGLIATO)

$$|V_3| = \frac{|1+j|}{|1-j|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\angle V_3 = \angle(1+j) - \angle(1-j) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

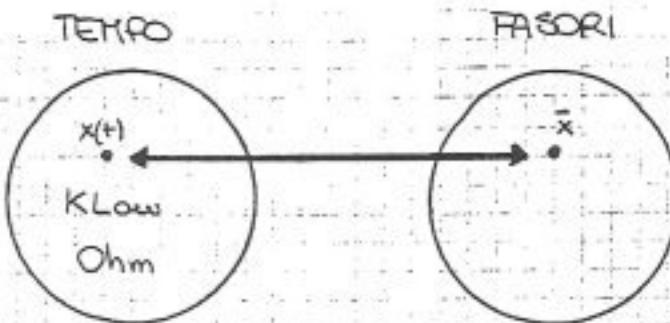
ESEMPIO: $\bar{V}_4 = \frac{1-j}{1+2j} \cdot (1+j) \quad \omega = 10 \text{ rad/sec}$

? $v_4(t)$

$$|V_4| = \frac{|1-j| \cdot |1+j|}{|1+2j|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\angle V_4 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \alpha \operatorname{ctg}^2 = -\alpha \operatorname{ctg}^2$$

$$v_4(t) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \cos\left(10t - \alpha \operatorname{ctg}^2\right)$$



$$x(t) = X_H \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{x} = X_H \cdot e^{j\varphi}$$

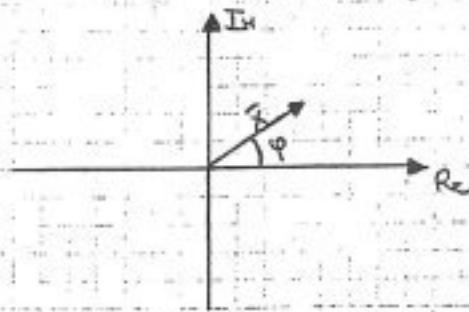
Dal dominio del Tempo passiamo nel dominio dei Fasori (e delle frequenze). Poi scoppiamo Tornare nel dominio del Tempo.

Dato il fasore $\bar{x} = X_H \cdot e^{j\varphi}$ possiamo costruire il vettore rotante:

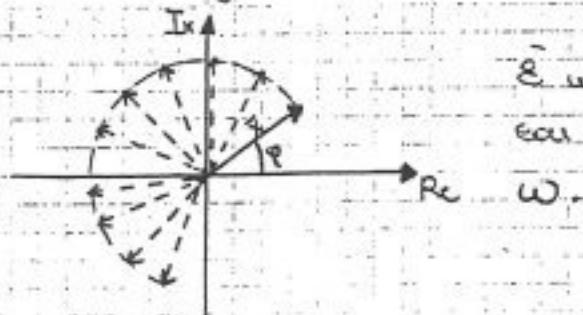
$\bar{x} \cdot e^{j\omega t}$ VETTORE ROTANTE

Vediamone il significato.

$\bar{x} = X_H \cdot e^{j\varphi}$ è un vettore fisso.



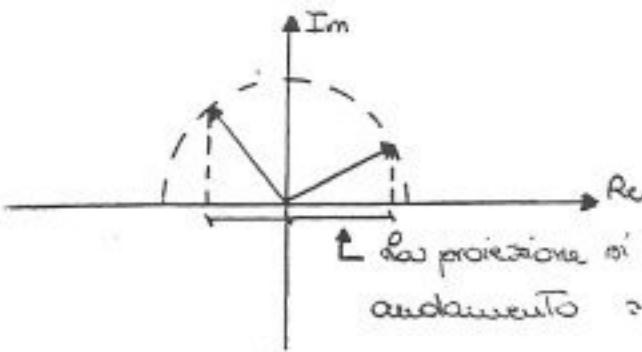
Quando utilizziamo il vettore rotante $\bar{x} \cdot e^{j\omega t}$ possiamo anche scrivere come $X_H \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$, il quale è ancora un fasore, ma la sua fase varia nel tempo - $(\varphi + \omega t)$:



È un vettore che ruota con velocità angolare

Questo è utile perché possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{x} \cdot e^{j\omega t}\} = \text{cioè proiettare il vettore} \\ &= \operatorname{Re}\{X_H \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\} \quad \text{sull'asse reale, tale 133} \\ &\quad \text{proiezione è proprio } x(t) \end{aligned}$$

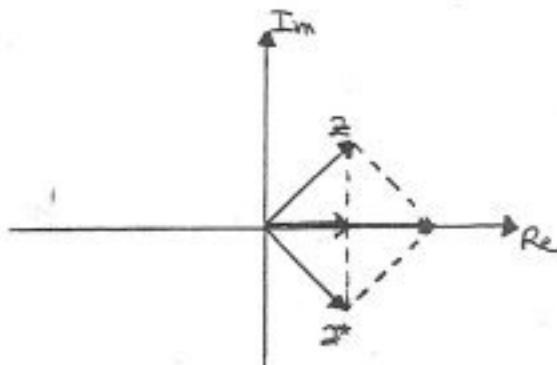


Le proiezioni si apreton nel tempo, con un andamento sinusoidale.

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \frac{\bar{z} \cdot e^{j\omega t} + \bar{z}^* \cdot e^{-j\omega t}}{2}$$

BREVE RICHIAMO TEORICO:

Dato il numero complesso $z = a + jb$, come trovarne a ?



- Si traccia il numero complesso
- Si traccia il suo complesso coniugato
- Si sommano i due vettori
- Si divide per 2. Si ottiene

$$\operatorname{Re} \{ z \} = \frac{\bar{z} + \bar{z}^*}{2}$$

PROPRIETÀ DEI FASORI:

1. LINEARITÀ (non necessario sapere la dimostrazione)

$$\begin{array}{ccc} X_1(t) & \leftrightarrow & \bar{X}_1 \\ \text{due sinusoidi} & & \\ X_2(t) & \leftrightarrow & \bar{X}_2 \\ \text{sinusoidi} & & \text{fasori} \end{array} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Costruiamo il segnale con le combinazioni lineari delle sinusoidi:

$$K_1 \cdot X_1(t) + K_2 \cdot X_2(t) \leftrightarrow K_1 \cdot \bar{X}_1 + K_2 \cdot \bar{X}_2$$

Dalla seconda equazione ricaviamo:

$$\begin{aligned} K_1 \cdot \operatorname{Re}\{\bar{X}_1 \cdot e^{j\omega t}\} + K_2 \cdot \operatorname{Re}\{\bar{X}_2 \cdot e^{j\omega t}\} = \\ = \operatorname{Re}\left\{\underbrace{(K_1 \cdot \bar{X}_1 + K_2 \cdot \bar{X}_2)}_{\text{un fasore}} \cdot e^{j\omega t}\right\} \end{aligned}$$

Che è una cosa simile a prima, quindi questo è un così un FASORE.

In generale:

$$\operatorname{Re}\{K \cdot \bar{z}\} = K \cdot \operatorname{Re}\{\bar{z}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\bar{z}_1 + \bar{z}_2\} = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1\} + \operatorname{Re}\{\bar{z}_2\}$$

2. DERIVAZIONE (sapere dimostrare)

$$z(t) = a(t) + j b(t)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)\right\} - \frac{d}{dt} a(t)$$

Ma come otteniamo le derivate,

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longleftrightarrow & \bar{x} \\ \frac{dx(t)}{dt} & \longleftrightarrow & j\omega \bar{x} \end{array}$$

In pratica, fare la derivata significa moltiplicare le
frequenze per $j\omega$.

Il fattore in questo caso è una costante
nella derivazione rispetto a t .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\bar{x} \cdot e^{j\omega t}\} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dt}(\bar{x} \cdot e^{j\omega t})\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{\bar{x} \cdot \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\{(\bar{x} + j\omega) e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Quindi, in generale:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dt} z(t)\right\} &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{z(t)\} \\ \operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dt} a(t) + \frac{d}{dt} b(t)\right\} &= \frac{d}{dt} a(t) \end{aligned}$$

LEGGI DI KIRCHHOFF:

KCL: nel tempo : $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$

nei fasori : $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$

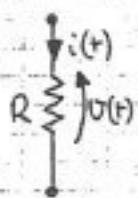
\uparrow somma dei fasori
 $= 0$, e questo 0
è un numero
complesso.

KVL: nel tempo : $v_1(t) + \dots + v_n(t) = 0$

nei fasori : $\bar{V}_1 + \dots + \bar{V}_n = 0$

LEGGI DI OHM:

RESISTENZA:

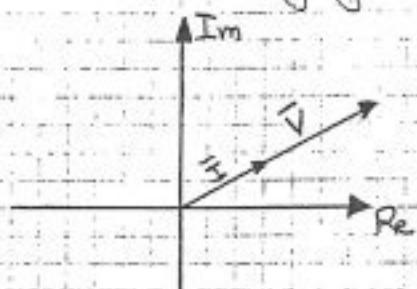


$$V(t) = R \cdot i(t) = 0$$

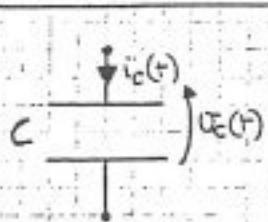
$$\bar{V} - R \cdot \bar{I} = 0$$

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$$

La tensione ha la stessa fase della corrente; infatti per poter determinare \bar{V} dobbiamo moltiplicare \bar{I} per la costante R . Graficamente:



CONDENSATORE:



$$C \cdot \frac{d}{dt} V_C(t) - i_C(t) = 0$$

$$C \cdot j\omega \bar{V}_C - \bar{I}_C = 0$$

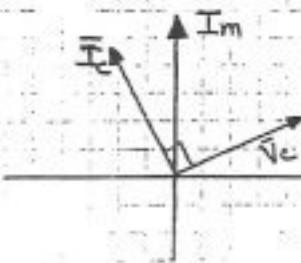
$$|\bar{I}_C| = j\omega \cdot C \cdot |\bar{V}_C|$$

$$\chi \bar{I}_C = \chi \bar{V}_C + \frac{\pi}{2}$$

La corrente è in anticipo rispetto a \bar{V}_C di $\frac{\pi}{2}$. Il modulo di \bar{I}_C dipenderà dalla pulsazione:

$$|\bar{I}_C| = \omega \cdot C \cdot |\bar{V}_C| \quad (\text{freq. più bassa, dc corrente più piccola})$$

La corrente è quindi in quadratura con la tensione. Graficamente:

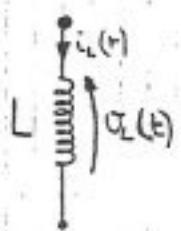


quando $\omega \rightarrow 0$, la $\bar{I}_C \rightarrow 0$,

quindi in continua il condensatore non compatta come un

circuito aperto.

INDUTTORE:



$$L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) - V_L(t) = 0$$

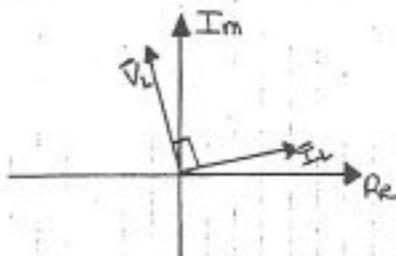
$$L \cdot j\omega \bar{I}_L = \bar{V}_L$$

$$|\bar{V}_L| = \omega \cdot L \cdot |\bar{I}_L|$$

$$\bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L + \frac{\pi}{2}$$

La tensione è in anticipo rispetto a \bar{I}_L di $\frac{\pi}{2}$.

Tensione e corrente sono quindi in QUADRATURA. Graficamente:



quando $\omega \rightarrow 0$ la $\bar{V}_L \rightarrow 0$; quindi in continua l'induttore si comporta come un circuito aperto.

CONCLUSIONI:

Grazie ai fatti abbiamosostituito a conti con le derivate nel tempo OPERAZIONI ALGEBRICHE fatte su numeri complessi.

Anticipiamo fin da ora che:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = j(\omega) \text{ IMPEDENZA}$$

Nei due casi di condensatore e induttore:

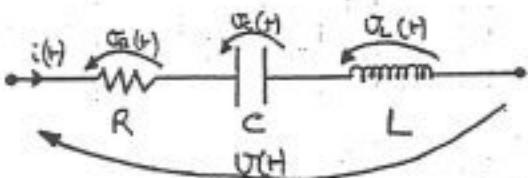
$$\bar{I}_C = j\omega \cdot C \cdot \bar{V}_C \Rightarrow \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{Z_C}$$

$$\bar{V}_L = j\omega \cdot L \cdot \bar{I}_L \Rightarrow \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L} = j\omega L = Z_L$$

COLLEGAMENTO DI BIPOLI

Collegiamo qualche bipolo e analizziamo:

COLLEGAMENTO SERIE:



Vogliamo trovare il legame tra $i(t)$ e $U(t)$ ai capi del bipolo complessivo. Per prima cosa ci poniamo nel dominio dei fasori:

$$\underline{\text{tempo}}: \quad U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$$

$$\underline{\text{fasori}}: \quad \bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C + \bar{U}_L =$$

$$= R \cdot \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I} + j\omega L \cdot \bar{I} =$$

$$= \bar{I} \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right) =$$

$$= \left[R + j \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L \right) \right] \cdot \bar{I}$$

\uparrow
 $Z(j\omega)$ IMPEDENZA EQUIVALENTE

In generale l'impedenza $Z(j\omega)$ è costituita da una parte reale e una parte immaginaria così distinte:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

\downarrow
RESISTENZA

\downarrow
REATTANZA

può essere positiva o negativa

Esplorando le impedenze:

$$R \rightarrow Z_R = R$$

$$C \rightarrow Z_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} = j \left(-\frac{1}{\omega C} \right) \quad X_C \text{ negativa } \left(-\frac{1}{\omega C} \right)$$

$$L \rightarrow Z_L = j\omega L$$

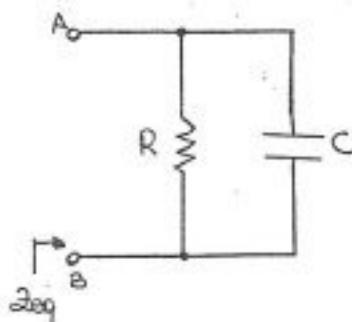
X_L positiva (ωL)

Concludendo possiamo quindi affermare che quando ripetiamo

determinare l'impedenza complessa di bipoli collegati in serie, non dobbiamo far altro che fare la somma delle singole impedenze.

COLLEGAMENTO PARALLELO:

Seguiamo immediatamente la linea di un esempio per comprendere come operare.



Determinare la Z_{eq}

$$Z_{eq} = \frac{Z_R + Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \\ = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{j\omega CR + 1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega CR + 1}$$

Moltiplicando per il complesso coniugato:

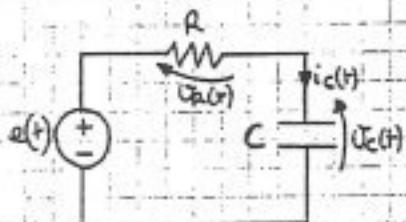
$$Z_{eq} = \frac{R}{j\omega CR + 1} \cdot \frac{-j\omega CR + 1}{-j\omega CR + 1} = \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} = \\ = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j \left(\frac{-\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \right)$$

↑ ↑
parte reale dipende da ω parte immaginaria
dipende da ω negativa
 $R(\omega)$ $X(\omega)$

ANALISI IN A.C.

Dato una rete, vediamo i "passi" necessari per poterla analizzare.

a)



$$e(t) = E \cos(\omega t)$$

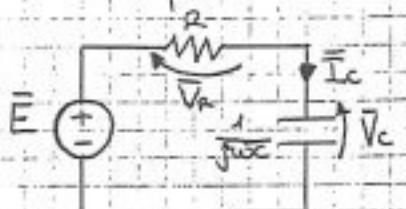
$$E = 10 \text{ V}$$

$$\omega = 10^3 \text{ rad/sec}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$

→ PASSO I°: sostituiamo a tutti i generatori il corrispondente farore, ed ai condensatori e iniettori le corrispondenti impedenze:



→ PASSO II°: a questo punto possiamo applicare tutte le leggi che conosciamo. In questo caso possiamo applicare la regola del portatore di tensione.

$$\begin{aligned} \bar{V}_C &= \bar{E} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \bar{E} \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR} \end{aligned}$$

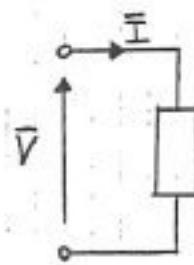
→ PASSO III°: ora possiamo tornare nel dominio del Tempo

$$\bar{V}_C = 10 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^3} = \frac{10}{1 + j}$$

$$v_C(t) = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(10^3 t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$$

$$|V_C| = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad \times \bar{V}_C = -\frac{\pi}{4}$$

AMMETTENZA



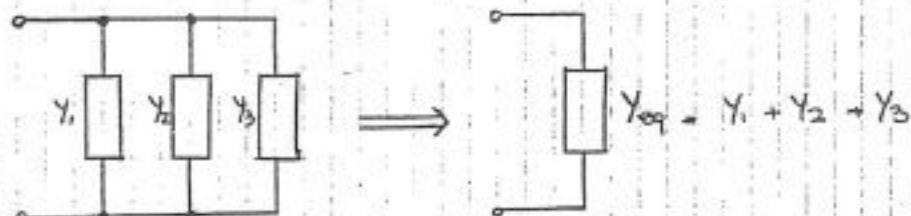
Partiamo dalla definizione di impedenza:

$$Z(j\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

Ora possiamo esprimere l'AMMETTENZA come:

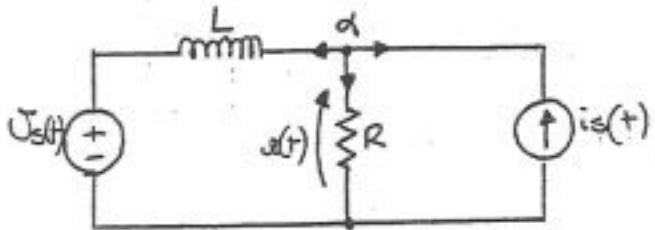
$$Y(j\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \underset{\text{conduttanze}}{G(\omega)} + j\underset{\text{suscettanze}}{B(\omega)}$$

Possiamo mettere che è la corrispondente alle conduttanze nel dominio del Tempo. Infatti:



SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Partiamo da un esempio:



$$e(t) \leftrightarrow \bar{E}$$

$$v_s(t) \leftrightarrow \bar{V}_s$$

$$i_s(t) \leftrightarrow \bar{i}_s$$

Dato MOLTO importante, è che i due generatori sono ISOFRQUENZIALI.

Risolviamo la rete applicando la KCL al modo a :

$$\frac{\bar{E} - \bar{V}_s}{j\omega L} + \frac{\bar{E}}{R} - \bar{i}_s = 0$$

$$\bar{E} \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} \right) = \bar{V}_s \cdot \frac{1}{j\omega L} + \bar{i}_s$$

$$\bar{E} = \left(\bar{V}_s \right) \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{j\omega L}}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R}}} + \left(\bar{i}_s \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R}}}$$

$$\bar{E} = \bar{V}_s \cdot H_1(j\omega) + \bar{i}_s \cdot H_2(j\omega)$$

ogni generatore produce un proprio effetto.

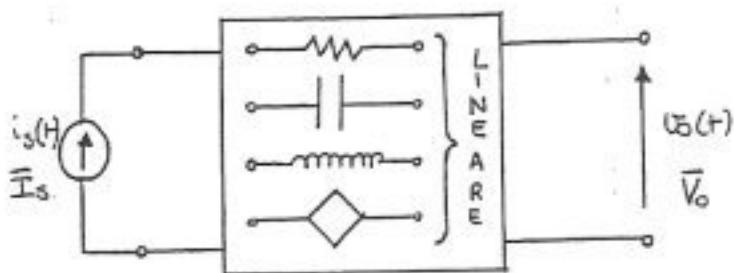
FUNZIONE
DI
RETE

$$H_1(j\omega) = \frac{\bar{E}}{\bar{V}_s} \Big|_{\bar{i}_s=0}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{\bar{E}}{\bar{V}_s} \Big|_{\bar{i}_s=0}$$

Quindi le funzioni di rete dipendono dalla pulsazione ω con una stessa formula.

Supponiamo di avere nella rete solamente un generatore:



e che la rete sta lavorando a regime.

Se prendiamo una qualsiasi grandezza, ad esempio $\bar{V}_o(t)$, la funzione di rete sarà:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{I}_s} \quad \bar{V}_o = H(j\omega) \cdot \bar{I}_s$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$\bar{I}_s = |\bar{I}_s| \cdot e^{j\angle \bar{I}_s}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_o &= |\bar{I}_s| \cdot |H(j\omega)| \cdot e^{j\angle \bar{I}_s} \cdot e^{j\angle H(j\omega)} \\ &= |\bar{I}_s| \cdot |H(j\omega)| \cdot e^{j(\angle \bar{I}_s + \angle H(j\omega))} \end{aligned}$$

Ricavato se sappiamo determinare la funzione di rete $H(j\omega)$, per qualsiasi ingresso e pulsazione ω siamo in grado di determinare l'uscita \bar{V}_o .

Tornando nel tempo:

$$i_s(t) = |\bar{I}_s| \cdot \cos(\omega t + \angle \bar{I}_s)$$

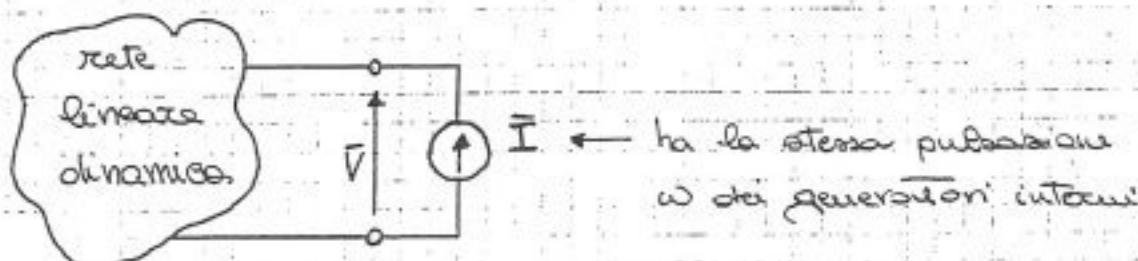
$$\boxed{\bar{V}_o(t) = |\bar{I}_s| \cdot |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle \bar{I}_s + \angle H(j\omega))}$$

alla pulsazione ω
dell'ingresso

27/05/03

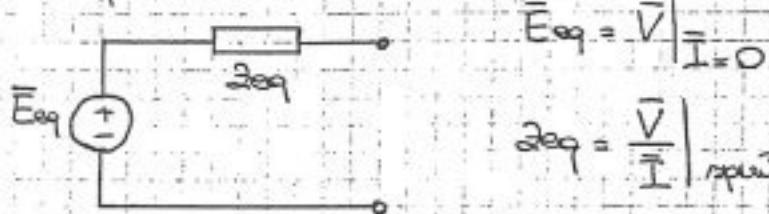
Abbiamo visto che anche in A.C. vale la sovrapposizione degli effetti. Se è valido tale principio, sono validi anche i principi di Thévenin e Norton.

CIRCUITI EQUIVALENTI TIPO SERIE



è una funzione di rete che lega causa (\bar{I}) e effetto (\bar{V})

Il circuito equivalente è:



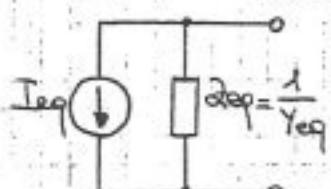
CIRCUITI EQUIVALENTI TIPO PARALLELO



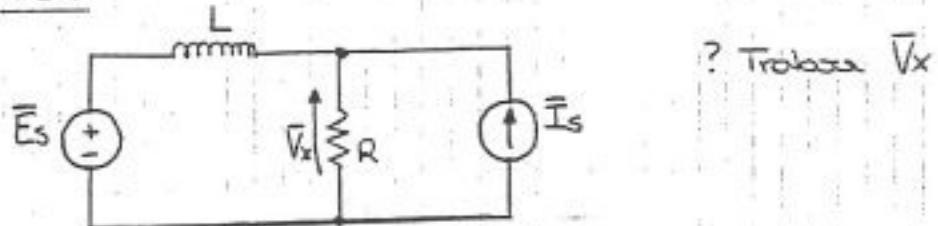
$$\bar{I}_{eq} = \bar{I} \Big|_{\bar{V}=0}$$

$$Y_{eq} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \Big|_{\text{rispetti i generi interni}}$$

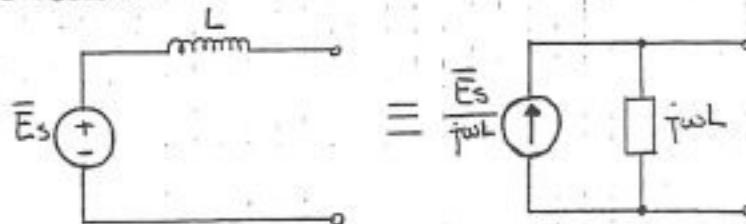
Il circuito equivalente è:



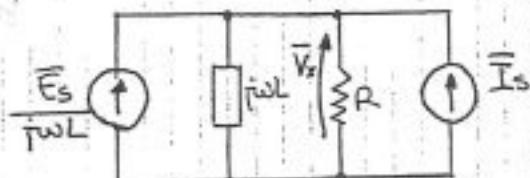
ESEMPIO:



Partiamo prendendo l'equivalente Norton della parte sinistra del circuito:



Quindi il circuito da analizzare risulta essere:

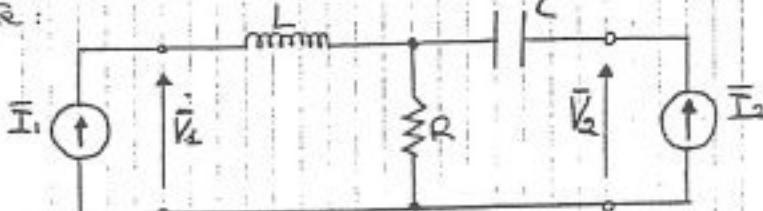


Ora possiamo sommare i due generatori moltiplicati per il parallelo tra le due impedenze e trovare così la \bar{V}_x .

DOPPI BIPOLI

ESEMPIO:

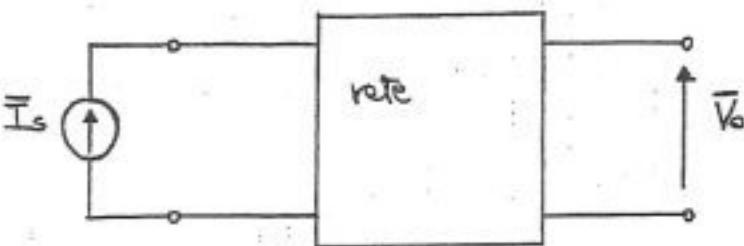
Data la rete a ω , Trovare la rappresentazione corretta in corrente:



$$\begin{cases} \bar{V}_1 = 2i_1(j\omega) + 2i_2(j\omega) \\ \bar{V}_2 = 2i_2(j\omega) + 2i_1(j\omega) \end{cases}, \text{ vediamo subito che:}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = (j\omega L + R_1) \cdot \bar{I}_1 + R \cdot \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = R \cdot \bar{I}_1 + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \bar{I}_2 \end{cases} \Rightarrow 2(j\omega) = \begin{bmatrix} j\omega L + R & R \\ R & R - \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

FUNZIONE DI RETE



Abbiamo una rete a cui abbiamo collegato un ingresso di corrente (lo stesso sarebbe anche per ingresso in tensione).

$$\bar{I}_s(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$\bar{V}_o(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_V)$$

Analizziamo la rete, e supponiamo di aver trovato la funzione di rete: $H(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{I}_s}$

Conosciuta $H(j\omega)$ abbiamo trovato la relazione tra ingresso e uscita -

$$\bar{V}_o = \bar{I}_s \cdot H(j\omega)$$

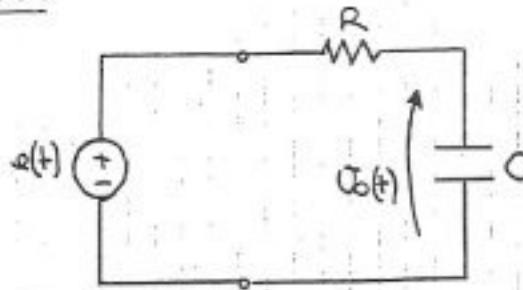
$$|\bar{V}_o| = |\bar{I}_s| \cdot |H(j\omega)|$$

$$\angle \bar{V}_o = \angle \bar{I}_s + \angle H(j\omega)$$

Pertanto possiamo scrivere che:

$$\bar{V}_o(t) = I_m \cdot |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi_I + \angle H(j\omega))$$

ESEMPIO:



con ω variabile
 $e(t) = 1 \cos \omega t$
 $C = 1 \mu F$
 $R = 1 K\Omega$

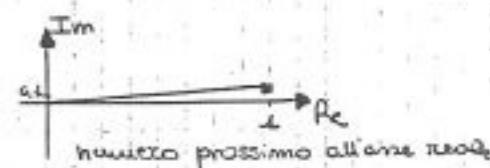
Analizzando, vediamo che questo circuito avrà un comportamento del tipo di filtro passa basso.

Vediamo come il circuito risponde a due valori diversi di ω : p.d.r.e.: $H(j\omega) = \frac{V_o}{E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 10^{-3}}$

I° CASO: $\omega_1 = 100 \text{ rad/sec}$

$$f = \frac{100}{2\pi} \approx 16 \text{ Hz}$$

$$H(j\omega_1) = \frac{1}{1 + j \cdot 10^{-1}} = \frac{1}{1 + j0.1} \rightarrow$$



Osservando il grafico, possiamo così dire che:

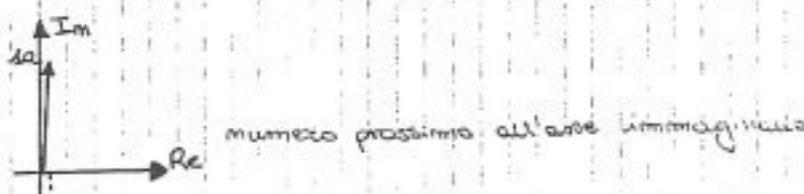
$$|H(j\omega_1)| \approx 1 \quad \left(\frac{1}{1+0.1} \approx 0.1 = \frac{1}{10} = 1 \right)$$

$$\angle H(j\omega_1) \approx 0 \quad (-\text{la fase del denominatore})$$

Ciò significa che avremo in uscita una sinusode di ampiezza ≈ 1 e sfasamento ≈ 0 , quindi l'uscita sarà praticamente uguale all'ingresso.

II° CASO: $\omega_2 = 10^4 \text{ rad/sec}$

$$H(j\omega_2) = \frac{1}{1 + j \cdot 10^4} \rightarrow$$



$$|H(j\omega_2)| \approx \frac{1}{10} \quad \left(\frac{1}{1+10^4} \approx \frac{1}{10} \right)$$

$$\angle H(j\omega_2) \approx -\frac{\pi}{2} \quad (\text{il denominatore tende a } +\frac{\pi}{2})$$

A questo punto possiamo allora scrivere:

$$U_o(t) = 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \cos \left(\omega t + 0 - \frac{\pi}{2} \right)$$

Ora definiamo la pulsazione di Taglio:

$$\omega_t \Rightarrow t.c.$$

$$\omega_t \cdot C \cdot R = 1$$

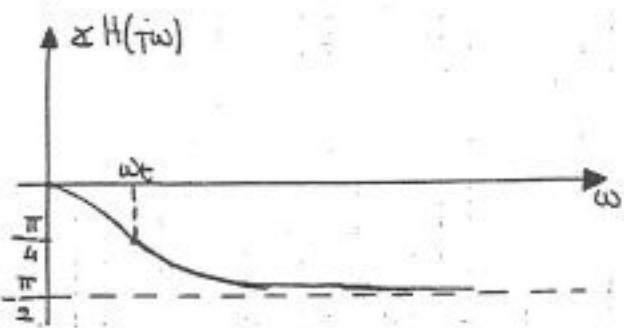
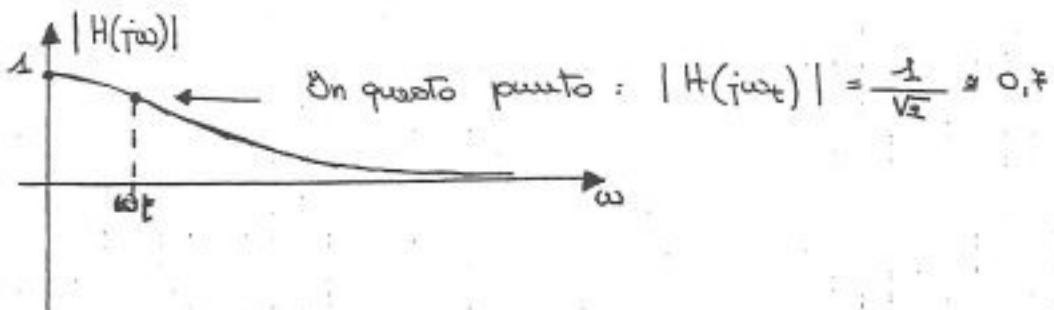
$$\boxed{\omega_t = \frac{1}{CR} = 10^3 \text{ rad/sec}}$$

PULSAZIONE DI TAGLIO

Ora vediamo i risultati graficamente:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

per $\omega \rightarrow 0$ $|H(j\omega)| \rightarrow 1$
per $\omega \rightarrow \infty$ $|H(j\omega)| \rightarrow 0$



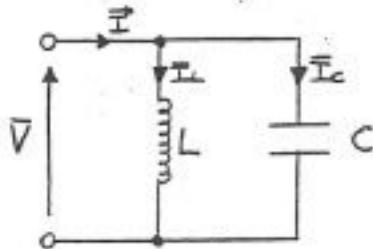
Dai due grafici e dalle relazioni ottenute, possiamo diri aver effettivamente riscontrato un comportamento di FILTRAGGIO PASSA BASSO. Un poche parole vengono associate "passate" (cioè rimangono quasi intatte) le componenti a bassa frequenza, mentre vengono "taglicate" le componenti ad alte frequenze. Nell'esempio,

$\omega_1 \rightarrow$ bassa \rightarrow passate

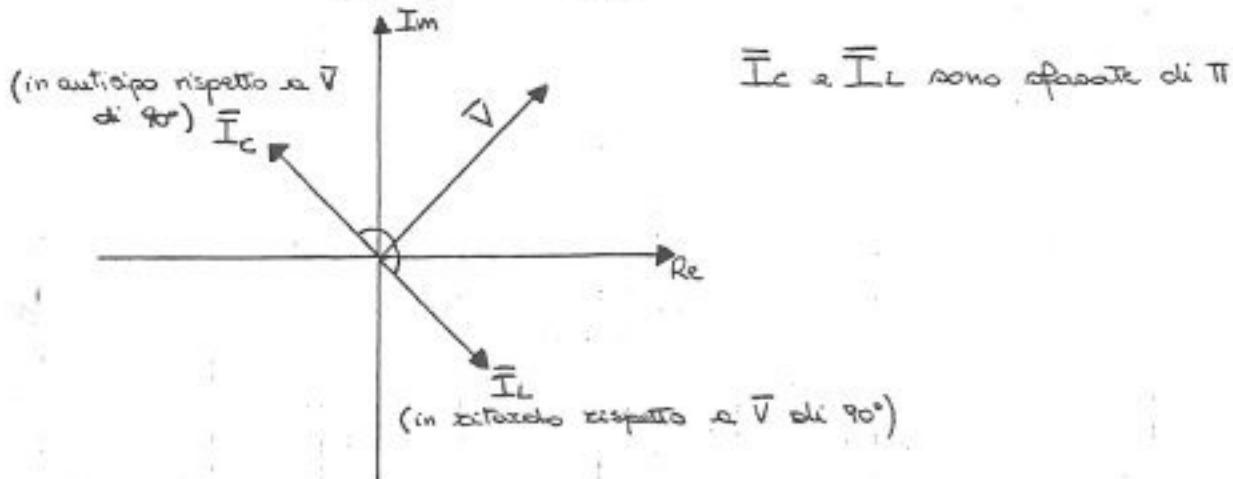
$\omega_2 \rightarrow$ alte \rightarrow taglicate

RISONANZA

Partiamo dal seguente circuito:



Mettendo su di un grafico le grandezze:



$$|\bar{I}_L| = \frac{|\bar{V}|}{\omega L}$$

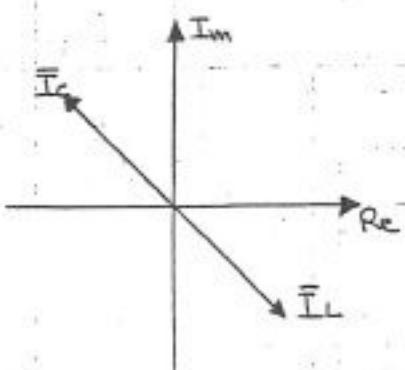
$$|\bar{I}_c| = \omega C \cdot |\bar{V}|$$

In una particolare situazione in cui $\frac{1}{\omega L} = \omega C$ possono essere uguali, pertanto anche le correnti I_c e I_L possono essere uguali. Se:

$$\frac{1}{\omega^2 L} = \omega^2 C, \text{ allora il circuito è in}$$

RISONANZA

Quindi: $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_L = 0$, la somma vettoriale delle correnti è uguale a 0.

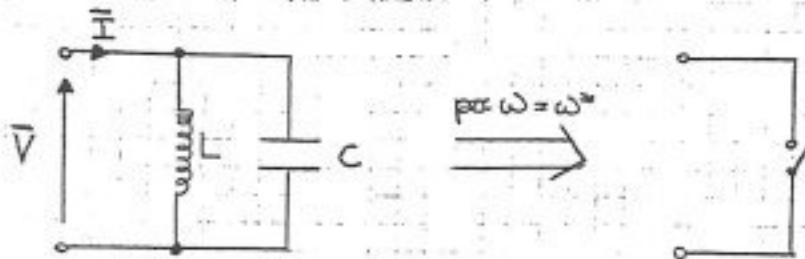


Potendo scrivere ω^* come:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

PULSAZIONE DI RESONANZA

A tale pulsazione, il circuito si comporta come un circuito aperto, in quanto ad ogni qualsiasi variazione della tensione \bar{V} , la corrente I resta nulla.

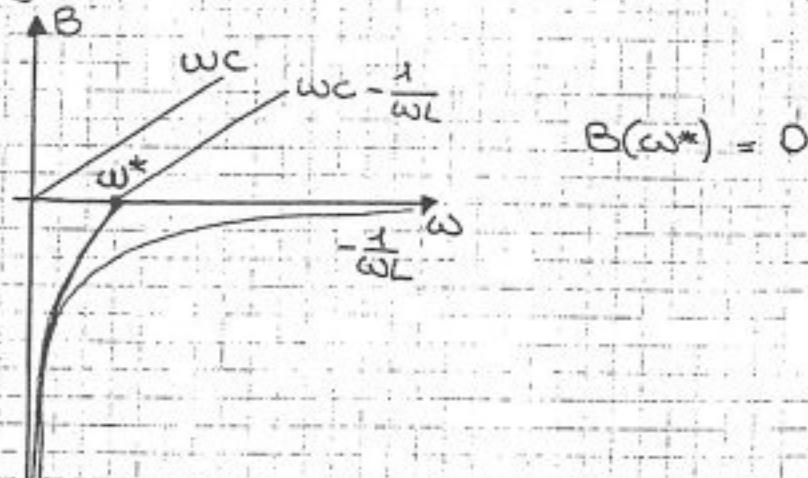


Calcoliamo ora l'ammittenza del parallelo:

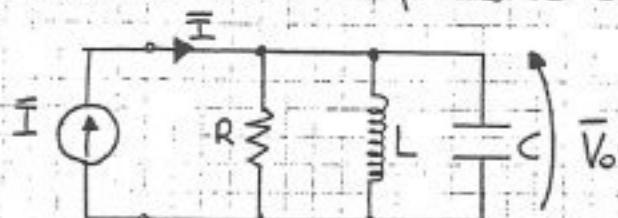
$$Y_{LC}(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

SUSCETTANZA $B(\omega)$
parte immaginaria dell'ammittanza

Vediamo graficamente come varia questa B in funzione di ω :



Ora consideriamo questo circuito:



$\hat{z}(\hat{\omega}) = \frac{\hat{V}_0}{\hat{I}} =$ impedenza del circuito (funzione di rete).

$$\Rightarrow \frac{1}{R + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \leftarrow \text{ammittanza totale} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \underline{\text{IMPEDENZA}}$$

$$|z(\hat{\omega})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$$

$$\angle z(\hat{\omega}) = -\arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}$$

$$2^\circ - \omega = \omega^* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$z(\hat{\omega}^*) = R$$

$$2^\circ - \omega \rightarrow 0$$

$z(\hat{\omega}) \approx j\omega L$ (tende a comportarsi come un induttore perché $\omega C \rightarrow 0$)

$$|z| = 0$$

$$\angle z = \frac{\pi}{2}$$

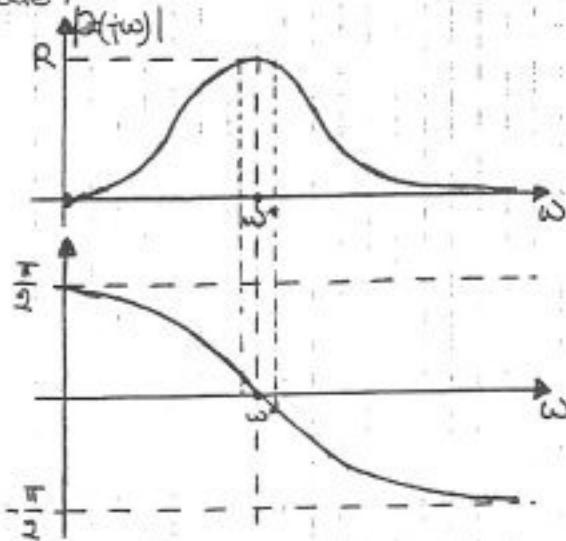
$$3^\circ - \omega \rightarrow \infty$$

$$z(\hat{\omega}) \approx \frac{1}{j\omega C}$$

$$|z| = 0$$

$$\angle z = -\frac{\pi}{2}$$

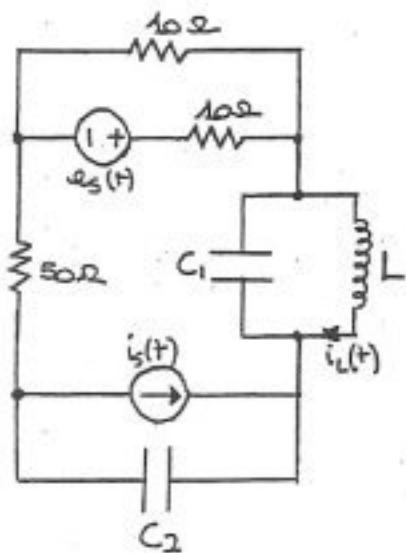
Graficamente:



Commento:

Questo circuito lascia passare inalterate le frequenze vicine a ω^* . Pertanto possiamo dire che è un FILTO PASSA BANDA.

ESEMPIO:



$$e_s(t) = 40 \cos 10t \text{ [V]}$$

$$i_s(t) = 5 \cos 10t \text{ [A]}$$

$$L = 20 \mu\text{H}$$

$$C_1 = 50 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 500 \mu\text{F}$$

? $i_L(t)$ al regime

→ Passiamo subito ai fatti associati

$$\bar{E}_s = 40$$

$$\bar{I}_s = 5$$

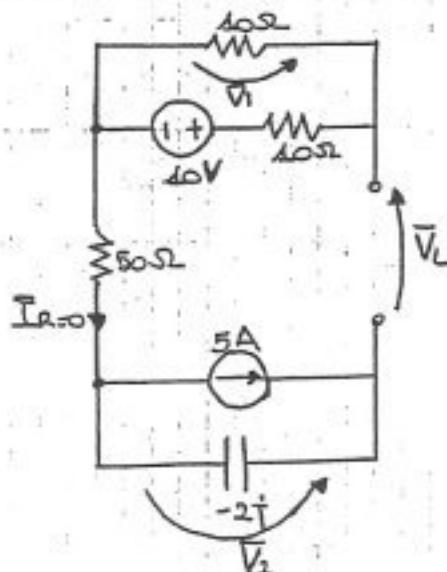
→ Troviamo le impedanze

$$Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^2}{j5} = -20j$$

$$Z_{C2} = \frac{Z_{C1}}{10} = -2j \quad \text{in quanto } C_2 = 10 C_1$$

$$Z_L = j20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 20j$$

L e C_1 sono in parallelo, ed hanno ammettenza opposta.
Pertanto $Z_{PT} = 0$. Poco è come se avessimo un circuito aperto, le due correnti non sono nulli, ma è nulla la loro somma. Analizziamo così il circuito:



$$\bar{V}_1 = 10 \cdot \frac{10}{10+10} = 5 \quad (\text{nº compuesto real})$$

$$\circ \quad \bar{V}_2 = 5 \cdot (-2\tilde{t}) = -10\tilde{t}$$

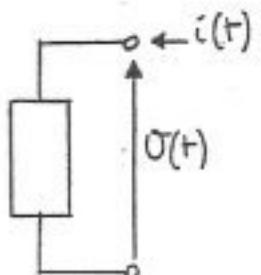
$$\bar{V}_L = \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = 5 + 10\tilde{t}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_L &= \frac{\bar{V}_L}{Z_L} = \frac{5 + 10\tilde{t}}{20\tilde{t}} = \frac{5(1 + 2\tilde{t})}{20\tilde{t}} = \frac{1}{4}(-2 + \tilde{t}) \\ &= -\frac{1}{4}(2 - \tilde{t})\end{aligned}$$

Pasando ora nel dominio del tiempo:

$$\circ \quad i_L(t) = -\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \cos\left(10^3 t\right) - \operatorname{acotg}\frac{1}{2}$$

SINUSOIDALE



On continua: $P = V \cdot I$

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

→ POTENZA ISTANTANEA (misurata in ogni istante di tempo)

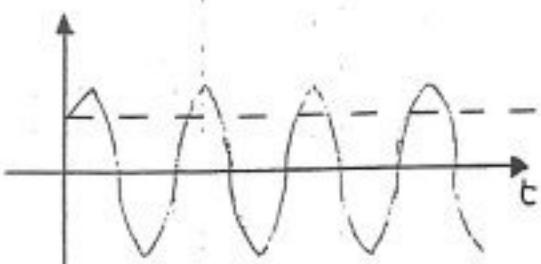
$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) = V_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &\stackrel{\text{Istanziazione tra tensione e corrente}}{=} \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot [\cos(\varphi_v - \varphi_i) + \cos(\varphi_v + \varphi_i + 2\omega t)] \end{aligned}$$

$$= \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi + \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)$$

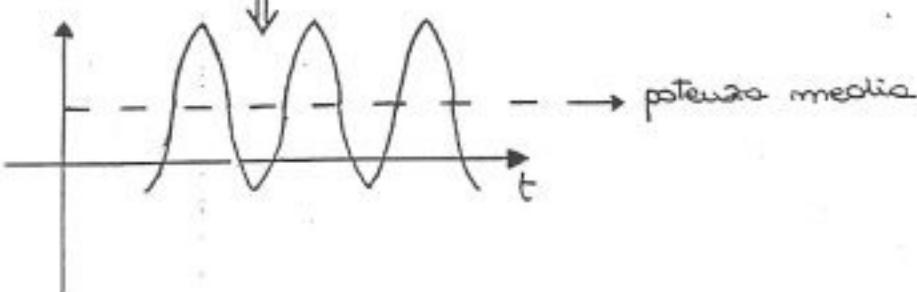
NON DIPENDE DAL TEMPO

doppia oscillazione rispetto a tensione e corrente

DIPENDE DAL TEMPO



Sommiamo i due segnali distinti:



→ potenza media

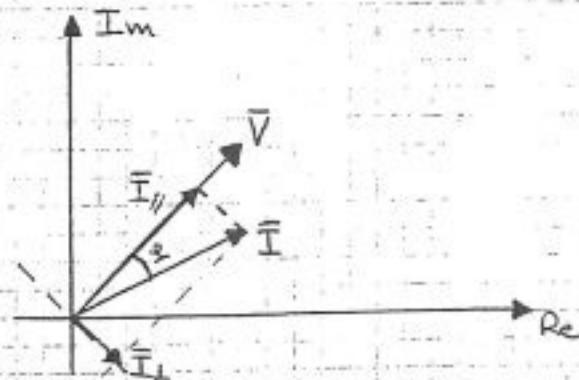
→ POTENZA MEDIA:

$$P_M = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t) dt = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi$$

T: periodo

Quindi P_M dipende da $\cos \varphi$, cioè dallo sfasamento tra tensione e corrente.

Così i fiori:



Riempagniamo la corrente con le sue proiezioni:

$$|I_{\parallel}| = I_m \cdot \cos \varphi \quad \times \quad \bar{I}_{\parallel} = \varphi_V$$

$$|I_{\perp}| = I_m \cdot \sin \varphi \quad \times \quad \bar{I}_{\perp} = \varphi_V - \frac{\pi}{2}$$

La corrente \bar{I} è la somma di queste due componenti.

Quindi anche $i(t)$ sarà anch'esso la somma delle due componenti dei due fiori:

$$i(t) = i_{\parallel}(t) + i_{\perp}(t) = I_m \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\omega t + \varphi_V) + I_m \sin \varphi \cdot \cos(\omega t + \varphi_V - \frac{\pi}{2})$$

Ora possiamo ric算olare la potenza istantanea:

$$p(t) = \underbrace{V_m \cdot I_m \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_V)}_{\text{potenza attiva}} + \underbrace{V_m \cdot I_m \cdot \sin \varphi \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{potenza reattiva}}$$

Dato dal prodotto della tensione per la componenti I_{\parallel} e I_{\perp}

$$= \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V)] + \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_V)$$

Dal prodotto tra $V(t)$ e $i(t)$ nasce il contributo di sinistra, sottolineato in rosso, della potenza istantanea. Tale contributo è detto POTENZA ATTIVA. 156

Il contributo a destra, sottolineato in blu, è associato alla presenza di condensatori e induttori. Tale contributo è detto POTENZA REATTIVA.

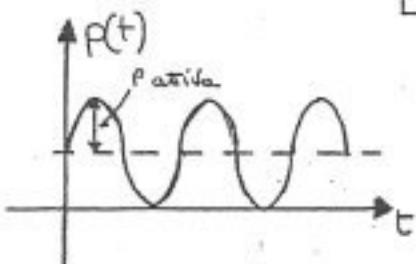
I° CASO:



Nel caso di un resistore e di una rete fatta esclusivamente da resistori (più generatori)

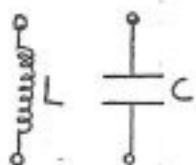
$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I = 0 \quad (\text{nella formula precedente il contributo oso viene eliminato})$$

$$P_R \neq 0$$



La potenza istantanea in questo caso non risulta mai essere negativa, perché il resistore non potrà mai produrre potenza.

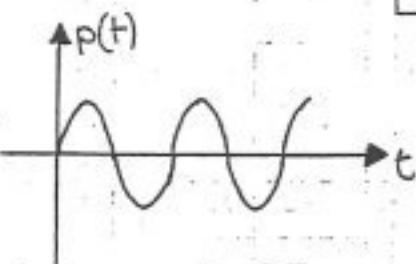
II° CASO:



Nel caso di una rete in cui sono presenti SOLO induttori e SOLO condensatori:

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{nella formula precedente il contributo oso viene eliminato})$$

$$P_R = 0$$



La $p(t)$ in L e in C è in alcuni istanti positiva ed in altri negativa (e poi acciuffano, un po' fomiscoro). Se prendiamo intervalli costanti di periodo, vediamo che la potenza assorbita è uguale alla potenza ceduta. Quindi sanno ACCUMULARE energia. Per questo si dicono elementi conservativi. 157

Possiamo quindi distinguere:

$$P = \frac{V_H \cdot I_H}{2} \cdot \cos \varphi \quad \text{potenza attiva [W]}$$

(misurabile con \bar{A} = P_H)

$$Q = \frac{V_H \cdot I_H}{2} \cdot \sin \varphi \quad \text{potenza reattiva [VAR]}$$

(non compre la varia)

$$A = \frac{V_H \cdot I_H}{2} \quad \text{potenza apparente [VA]}$$

$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Usiamo un coefficiente per individuare la potenza attiva e la potenza reattiva, tramite la:

POTENZA COMPLESSA

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

fase \bar{V} fase di \bar{I}
complejo conjugado

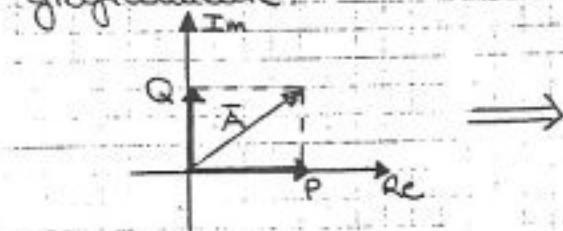
$$\frac{1}{2} \cdot V_H \cdot e^{j\varphi_V} \cdot I_H \cdot e^{-j\varphi_I} = \frac{1}{2} \cdot V_H \cdot I_H \cdot e^{j\varphi} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} V_H \cdot I_H \cdot \cos \varphi}_{\{Re\} = P} + j \underbrace{\frac{1}{2} V_H \cdot I_H \cdot \sin \varphi}_{\{Im\} = Q}$$

$$\{Re\} = P$$

$$\{Im\} = Q$$

Graficamente:



TRIANGolo DELLE POTENZE



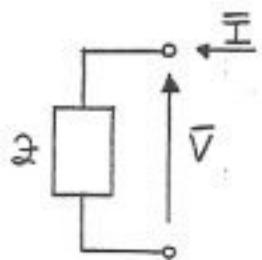
$$\varphi = \arctan \frac{Q}{P}$$

Vediamo che la potenza apparente A risulta essere uguale al modulo $|\bar{A}|$ (potenza complessa):

$$A = |\bar{A}| = \frac{1}{2} V_H \cdot I_H$$

CALCOLO DELLE POTENZE

--- su una generica impedenza Z ---



$$\bar{A} = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

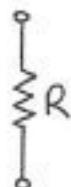
$$\bar{V} = Z \cdot \bar{I}$$

$$Z = R + jX$$

resistiva reattiva

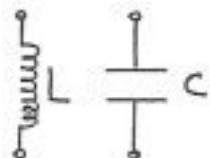
$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{1}{2} Z \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot Z \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R}_{\text{attiva } P} + j \underbrace{\frac{1}{2} |I|^2 \cdot X}_{\text{reattiva } Q}\end{aligned}$$

I° CASO :



$$\bar{A} = P = \frac{1}{2} |I|^2 \cdot R \quad (\text{soltanente potenza attiva})$$

II° CASO :



$$\bar{A} = Q = j \cdot \frac{1}{2} |I|^2 \cdot X \quad (\text{soltanente potenza reattiva})$$

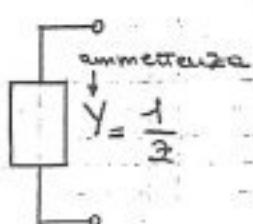
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$\bar{A} = Q = j \cdot \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot X$$

caso C : $-j \frac{1}{2} |I|^2 \cdot \frac{1}{\omega C}$
 caso L : $\frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot \omega L$

Ma cosa succede quando anziché conoscere Z conosciamo $Y = \frac{1}{Z}$?



$$\bar{A} = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{I} = Y \cdot \bar{V}$$

$$\boxed{\bar{A}} = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{V}^* \cdot Y^* =$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot |V|^2 \cdot Y^*}$$

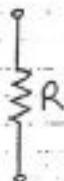
In particolare se suscattante

$$Y = G + jB$$

$$\bar{A} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot |V|^2 \cdot G}_{\text{attiva } P} + j \underbrace{\frac{1}{2} |V|^2 \cdot (-B)}_{\text{reattiva } Q}$$

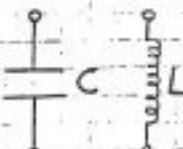
conjugato

I° CASO:



$$P = \frac{1}{2} |V|^2 \cdot G = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V|^2}{R}$$

II° CASO:



$$Y_C = j\omega C$$

$$Y_L = -\frac{j}{\omega L} = j\left(-\frac{1}{\omega L}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2} |V|^2 (-B) < C : -\frac{1}{2} |V|^2 \omega C$$

$$L : \frac{1}{2} |V|^2 \cdot \frac{1}{\omega L}$$

OSSERVAZIONE: Ma perché è $\frac{1}{2}$?

$$P = \frac{1}{2} V_H \cdot I_H \cos \varphi \rightarrow \sigma(t) = V_H \cdot \cos \omega t$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sigma(t)^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T V_H^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{V_H^2}{2} dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cancel{\cos \omega t} dt = 0$$

$$V_{eff}^2 = \frac{V_H^2}{2} \quad V_{eff} = \frac{V_H}{\sqrt{2}} \quad I_{eff} = \frac{I_H}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{V_H}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_H}{\sqrt{2}} \cos \varphi = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos \varphi$$

TEOREMA DI BOUCHEROT

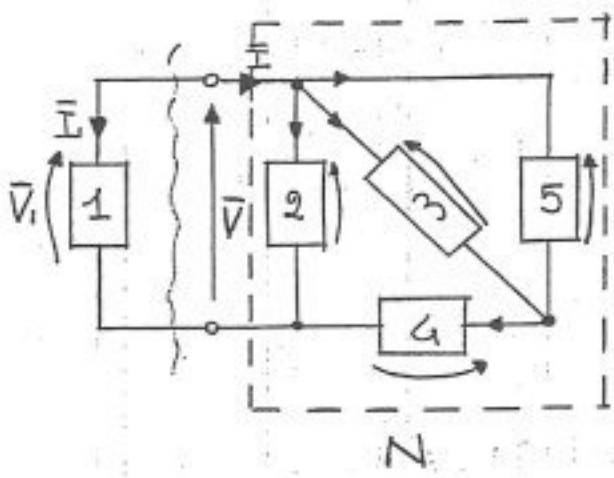
Consideriamo una rete elettrica di cui conosciamo \bar{V}_k e \bar{I}_k , misurate su ogni bipolo con la convenzione degli UTILIZZATORI:

$$\sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \bar{V}_k \cdot \bar{I}_k^* = \bar{0} \quad (\text{zero compenso})$$

$$= \sum_{k=1}^l (P_k + jQ_k) < \begin{cases} \sum_k P_k = 0 \\ \sum_k Q_k = 0 \end{cases}$$

Conseguenza di ciò è che:

- se poniamo due reti:



Tutte le potenze vengono considerate uscenti:

$$\bar{A}_1 + (\bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_5) = 0$$

la potenza \bar{A}_N è anche la potenza uscente da \bar{A}_1 , cioè:

$$[-\bar{A}_1 = \bar{A}_N]$$

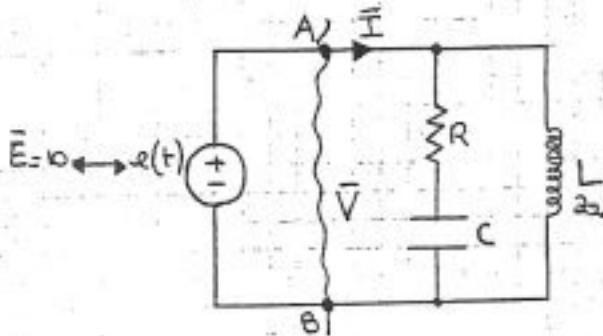
Allora:

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{2} \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^* = \frac{1}{2} \bar{V}_1 (-\bar{I}_1^*) = -\frac{1}{2} \bar{V}_1 \cdot \bar{I}^* = -\bar{A}_N$$

Tirando le somme:

$$\bar{A}_N = \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_5 , \quad \text{cioè è la somma delle potenze dei singoli elementi che compongono la rete.}$$

ESEMPIO:



$$e(t) = 10^3 \cos 10^3 t \text{ V}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$

$$L = 1 \text{ H}$$

? determinate P, Q e $\cos \varphi$ erogate dal generatore, che equi.
Salgono a P, Q e $\cos \varphi$ assorbite dalla rete AB.

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^3 \cdot 10^{-6}} = -j10^3 \quad R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$Z_1 = 1000 (1-j)$$

$$Z_2 = Z_L = j\omega L = j1000$$

$$Z_{AB} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1000(1-j) \cdot j1000}{1000(1-j) + j1000} = \frac{1000(1-j) \cdot j1000}{1000 - 1000j + 1000j} \\ = 1000(1+j)$$

↑ fin qui da questo punto possiamo capire
ci che Q sarà positiva!

$$\bar{V} = \bar{E} = 10$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_{AB}} = \frac{10}{1000(1+j)}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{10^3 \cdot 2} (1-j) = \\ = \frac{1}{40} (1-j)$$

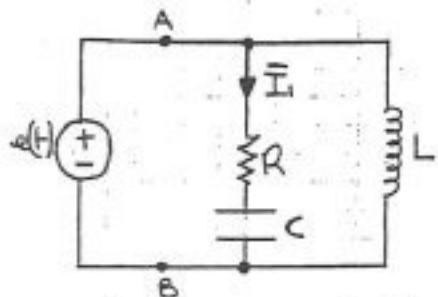


$$P = \frac{1}{40} \text{ W}$$

$$Q = +j \frac{1}{40} \text{ VAR} \quad (\text{volt amperc reattivi})$$

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} = \frac{\pi}{4} \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7 \quad 162$$

Ma proviamo a fare una verifica su questo circuito dei risultati ottenuti, tramite il teorema di Joule.



$$Q_L = \frac{1}{2} \cdot |V|^2 \cdot \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \text{ VAR}$$

$$\bar{I}_L = \frac{10}{Z_1} = \frac{-j\phi}{1000(1-j)} \Rightarrow |\bar{I}_L| = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q_C = -\frac{1}{2} |\bar{I}_C|^2 \cdot \frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^3 = -\frac{1}{40} \text{ VAR}$$

$$P_R = \frac{1}{2} \cdot |\bar{I}_L|^2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \text{ W}$$

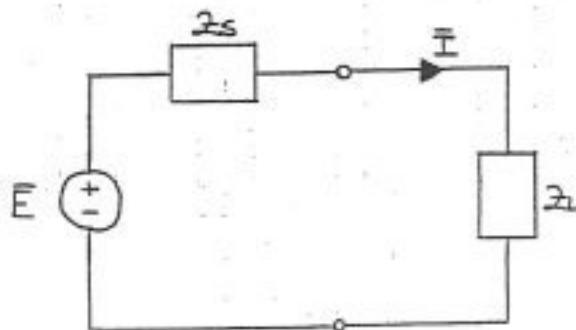
Per tanto:

$$P_{AB} = P_R = \frac{1}{40} \text{ W}$$

$$Q_{AB} = Q_L + Q_C = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \text{ VAR}$$

MASSIMO TRASFERIMENTO

DI POTENZA (ATTIVA)



Il nostro obiettivo è quello di massimizzare la P_L .

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}, Z_S = R_S + jX_S \\ R_S > 0 \end{array} \right\} \text{Noti}$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$R_L > 0, X_L ?$$

Sono le due parti che dobbiamo progettare

$$\left. \begin{array}{l} P_L = \frac{1}{2} \cdot |\bar{I}|^2 \cdot R_L \\ \bar{I} = \frac{\bar{E}}{Z_S + Z_L} \\ = \frac{\bar{E}}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)} \end{array} \right\} \text{Sia } P_L \text{ e } \bar{I} \text{ dipendono da } Z_L.$$

Pertanto, sostituendo:

$$P_L(R_L, X_L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}|^2 \cdot R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

Per massimizzare P_L vediamo che X_L compare solamente al denominatore (al quadrato). Agendo su X_L dobbiamo diminuire il più possibile il denominatore.

Quindi portate:

$$X_L = -X_S$$

Otteneremo cioè:

$$P_L(R_L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}|^2 \cdot R_L}{(R_s+R_L)^2}$$

$$P_L(R_L) = \frac{1}{2} \cdot |\bar{E}|^2 \cdot \frac{1}{R_L} \cdot \frac{1}{(R_s+R_L)^2}$$

Quindi, minimizzando il denominatore,

$$d(R_L) = \frac{(R_s+R_L)^2}{R_L} = \frac{R_s^2}{R_L} + R_L + 2R_s$$

Per trovare il punto di minimo, si cerca dove si annulla la derivata. Pertanto deriviamo rispetto a R_L e uguagliamo a zero:

$$R_s^2 \left(-\frac{1}{R_L^2} \right) + 1 + 0 = 0$$

$$R_s^2 = R_L^2$$

Ma è da Tenere presente che R_L deve essere maggiore di zero (dal testo). Ottieniamo quindi che:

$$R_L = R_s$$

Per massimizzare la potenza attiva, si è verificato che:

la Z_L abbia uguale R_e { $2s$ } e Z_L sia uguale a $2s$ coniugata. In questo caso si ha ADATTATO IL CARICO.

$$R_L = R_s$$

$$Z_L = Z_s^*$$

In tal caso la R_{eq} osta del generatore \bar{E} , cioè la Z_{eq} , è uguale a $Z_L + Z_s = 2R_s$.

Allora:

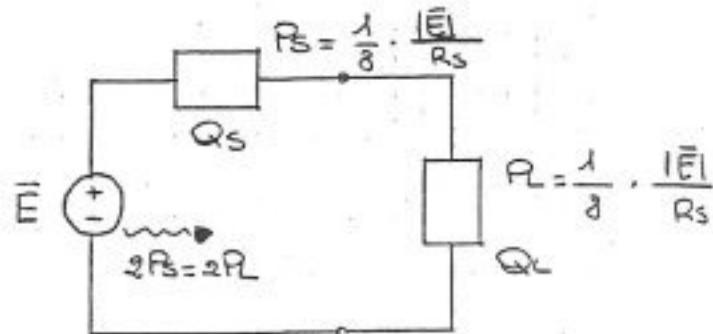
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{2R_s}$$

Pertanto ora possiamo esprimere la potenza attiva P_L massima.

$$P_L \text{ massima} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}|^2}{4R_s^2} \cdot R_s = \frac{1}{8} \cdot \frac{|\bar{E}|^2}{R_s}$$

- la quale è detta anche "POTENZA UTILIZZABILE".

Proviamo a fare un bilancio delle potenze:



- Se il generatore di tensione non genera alcuna potenza reattiva, perciò:

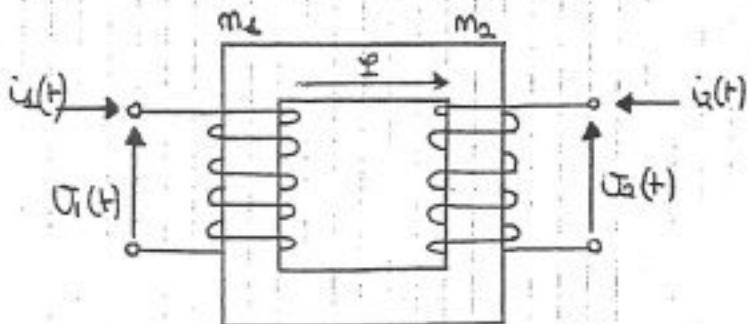
$$Q_L = -Q_S$$

$$Q_L = \frac{1}{2} |\bar{I}|^2 \cdot X_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\bar{E}|^2}{4R_S^2} \cdot X_L$$

$$Q_S = -Q_L$$

TRASFORMATORE IDEALE

Se il trasformatore ha un cuore di materiale ferromagnetico, attorno al quale sono avvolte le spire,



$$\Psi(t) = \text{flusso magnetico} \cdot \frac{m_1 \cdot i_1(t) + m_2 \cdot i_2(t)}{R}$$

\uparrow
riduttanza

Per il flusso qui si nominano le due forze elettromotrici che compongono il flusso stesso.

Il comportamento elettrico è influenzato dal comportamento magnetico.

Quando circola corrente, possiamo supporre che il flusso del campo si mantenga tutto all'interno della struttura, e non vada all'estero.

$$\Phi_1(t) = m_1 \cdot \varphi(t)$$

flusso concentrato sull'avvolgi-
mento m_1 .

$$\Phi_2(t) = m_2 \cdot \varphi(t)$$

flusso concentrato sull'avvolgi-
mento m_2 .

$$\left. \begin{aligned} U_1(t) &= \frac{d}{dt} \Phi_1(t) = m_1 \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \\ U_2(t) &= \frac{d}{dt} \Phi_2(t) = m_2 \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \end{aligned} \right\} \boxed{U_2(t) = U_1(t) \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} \right)}$$

Sarà la seconda relazione del trasformatore ideale:

$$R \cdot \varphi(t) = m_1 \cdot i_1(t) + m_2 \cdot i_2(t)$$

La resistenza rappresenta l'opposizione del sistema.

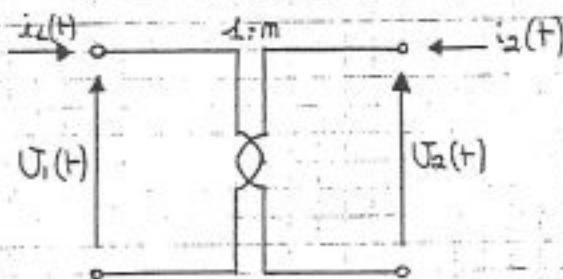
Se R tende a 0, anche il secondo membro tende a 0:

$$m_2 \cdot i_2(t) + m_1 \cdot i_1(t) = 0$$

Quindi possiamo trovare la relazione:

$$i_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot i_1(t)$$

Dai risultati ottenuti:



$$\frac{m_2}{m_1} = M$$

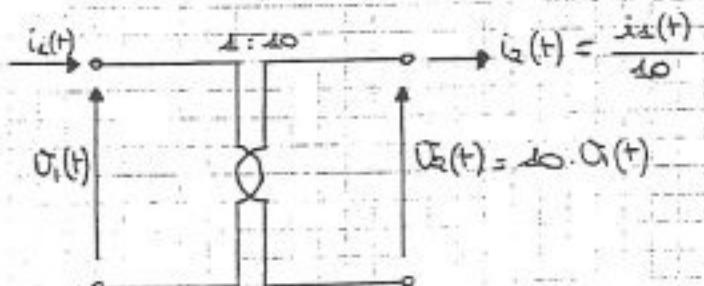
$$U_2(t) = M \cdot U_1(t)$$

$$i_2(t) = -\frac{1}{M} \cdot i_1(t)$$

OSSERVAZIONI:

1 - Le due equazioni potrebbero far pensare che il trasformatore possa lavorare anche in continua. In realtà NON è così, in continua non lavora, si comporta così come un cortocircuito. Pertanto funzione solamente in ALTERNATA.

2 - Ma a cosa serve il trasformatore?

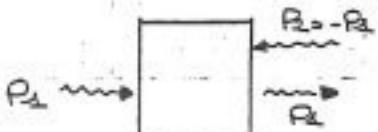


Vediamo che il trasformatore cambia la tensione e la corrente, ma mantiene costante la potenza, visto che il loro prodotto rimane costante.

$$P(t) = U_2(t) \cdot i_2(t) + U_2(t) \cdot i_1(t) \quad \underline{\text{POTENZA ISTANTANEA}}$$

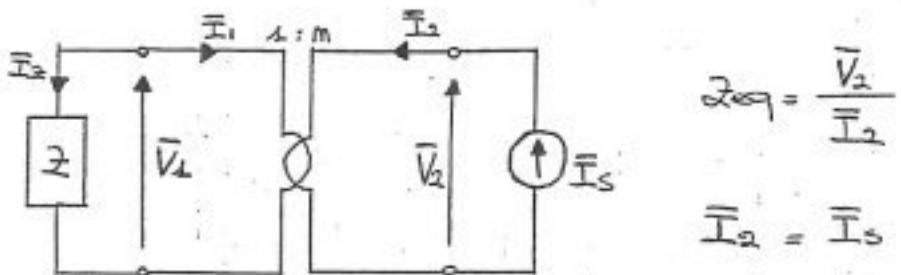
$$= U_2(t) \cdot i_2(t) + \mu U_1(t) \cdot \left(-\frac{i_1(t)}{\mu} \right) = 0$$

Cio' vuol dire che:



per questo è detto anche
TRASFORMATORE DI POTENZA

Il Trasformatore può anche essere impiegato per modificare (adattare) le impedanze. Ad esempio:



$$Z_{eq} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_s$$

Possiamo determinare \bar{I}_2 in funzione di \bar{I}_s :

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_s \cdot m$$

$$\bar{I}_2 = -\frac{1}{m} \cdot \bar{I}_4$$

$$\bar{I}_4 = -\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_1 = -m \cdot \bar{I}_2$$

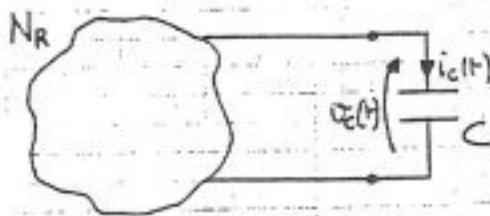
$$\bar{V}_1 = \bar{I}_2 \cdot Z = m \cdot \bar{I}_2 \cdot Z$$

$$\bar{V}_2 = m \cdot \bar{V}_1 = (m^2 \cdot Z) \cdot \bar{I}_2$$

Per tanto:

$$Z_{eq} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = m^2 \cdot Z$$

TRANSITORIO



Supponiamo che la rete ammetta Thévenin e Norton.

Ad esempio prendiamo l'equivalente Thévenin:



$$i_c(t) = C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt}$$

Applicando la KVL alla maglia:

$$R_{eq} \cdot C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = e(t)$$

$$\tau = C \cdot R_{eq} \quad \tau = C \cdot R \text{ è la costante di tempo}$$

$$\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot U_c(t) = \frac{e(t)}{\tau}$$

$$U_c(t=t_0) = U_{c0}$$

Ora utilizzeremo più calcoli analitici per risolvere l'equazione. La soluzione generale di tutto il problema sarà:

$$U_c(t) = U_{c0}(t) + U_{cp}(t)$$

↓ ↓
integrale omogenea integrale particolare

EQUAZIONE OMogenea: $\frac{dU_c(t)}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = 0$

Se termine noto uguale a zero significa "senza i generatori interni". Questa equazione ammette soluzione del tipo:

$$U_{c0}(t) = K \cdot e^{\lambda(t-t_0)}$$

Ora discutiamo:

$$\lambda \cdot K \cdot e^{\lambda(t-t_0)} + \frac{1}{\tau} \cdot K \cdot e^{\lambda(t-t_0)} = \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right) \cdot K \cdot e^{\lambda(t-t_0)} = 0$$

Quindi:

$$p(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\tau} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{\tau}$$

PULSAZIONE NATURALE

Tutto il sistema è governato da questa pulsazione

$$U_{eq}(t) = K \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

MODO NATURALE

la SOLUZIONE PARTICOLARE dipende dai termini noti.

Studiamo il caso in cui:

$$e(t) = E_{eq} \text{ costante}$$

$$U_{cp}(t) = \hat{U}_{cp}$$

$$\frac{1}{\tau} \cdot \hat{U}_{cp} = \frac{E_{eq}}{\tau}$$

$$U_c(t) = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{eq}$$

$$t=t_0 \quad U_c(t_0) = U_{c0} = K + E_{eq}$$
$$[K = (U_{c0} - E_{eq})]$$

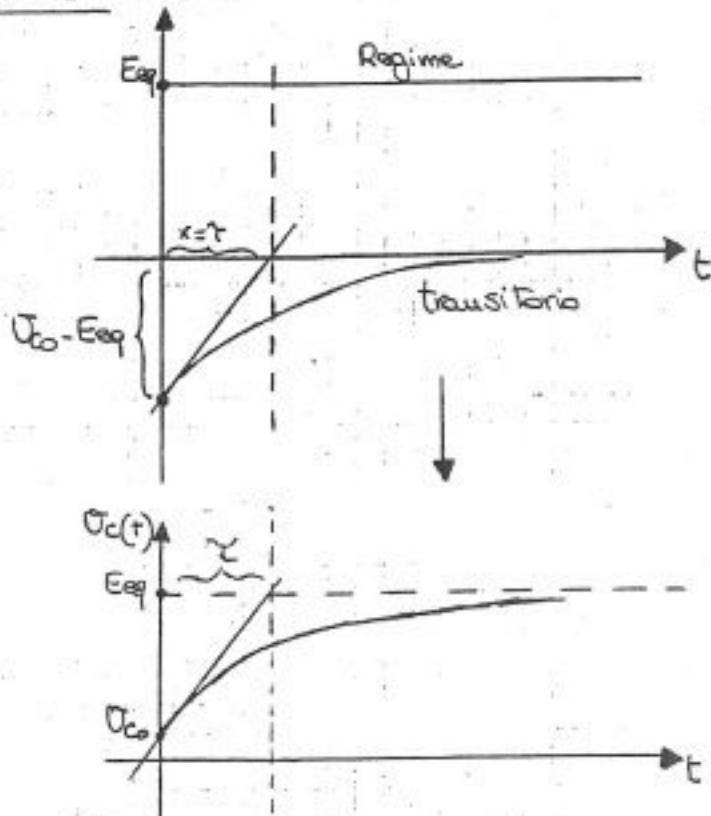
Allora,

condizione iniziale	τ costante di tempo	integrale
$U_c(t) = (U_{c0} - E_{eq}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{eq}$		

Ricette che riguardano il
TRANSITORIO, perché
per $t \rightarrow \infty$ va a "0"
($e^{\lambda t} \rightarrow 0$ se λ è negativo)

termine che
dipende dagli
ingressi ed è detto
REGIME.

ESEMPIO:



La somma istante per istante delle due corse ci fornisce il segnale:

Vediamo il significato delle costante di tempo:

$$\frac{d}{dt} \left[(U_{c0} - E_{eq}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right]_{t=t_0} = - \frac{(U_{c0} - E_{eq})}{\tau} \xrightarrow{\text{pendente}} \quad \text{pendente}$$

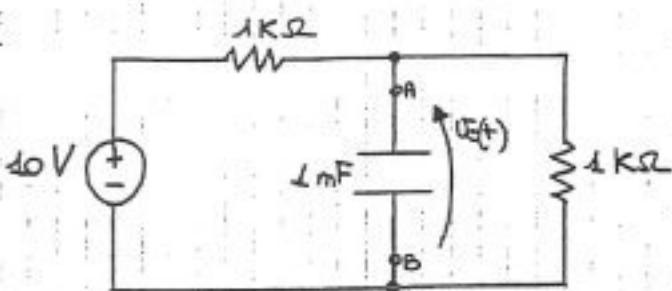
$$-\frac{(U_{c0} - E_{eq})}{\tau} = -\frac{(U_{c0} - E_{eq})}{\tau}, \text{ dunque proprio } x = \tau.$$

Per tanto τ è l'intervallo di tempo. Tale intervallo dà l'idea della velocità con la quale il Transitorio si esaurisce.

All'incirca, $t - t_0 \approx 5\tau$

Dopo 5τ quindi il Transitorio si esaurisce.

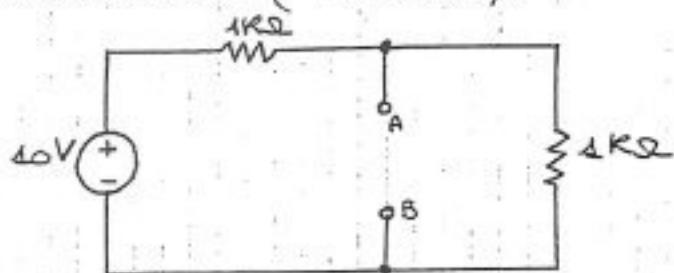
ESEMPIO:



? $U_c(t)$ nel tempo

$$U_c(t=0) = -2 \text{ V}$$

Come primo passo dobbiamo fare un equivalente della parte non dinamica (Thévenin):



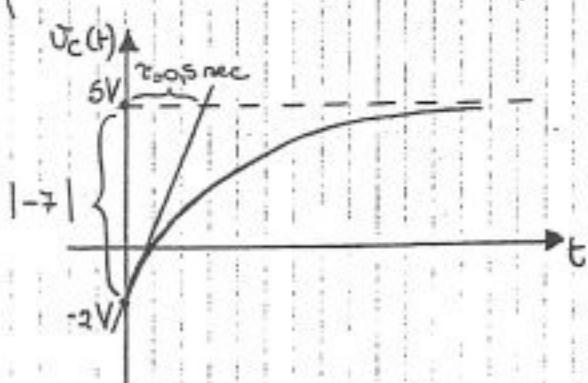
Poi Thévenin:

$$R_{eq} = 0,5 \text{ k}\Omega$$

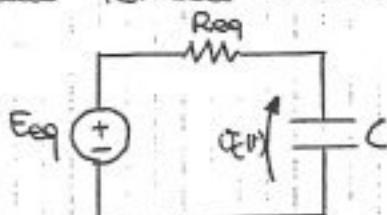
$$E_{eq} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ V}$$

$$U_c(t) = (-2 \text{ V} - 5 \text{ V}) \cdot e^{-\frac{t}{R_{eq}}} + 5 = -7 \cdot e^{-\frac{t}{0,5}} + 5 \text{ V}$$

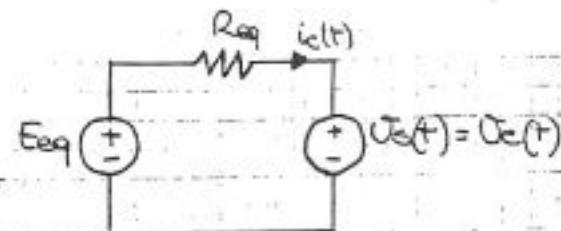
$$\tau = R_{eq} \cdot C = 500 \cdot 10^{-3} = 0,5 \text{ sec}$$



Possiamo calcolare anche la corrente nel condensatore. Questo perché possiamo tornare a ritorno al circuito equivalente:



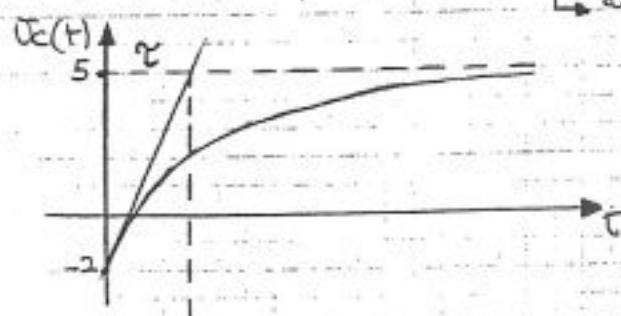
Possiamo sostituire il condensatore con un generatore di tensione che impone $U_c(t)$.



$$i_C(t) = \frac{U_{eq} - U_c(t)}{R_{eq}} = \frac{U_{eq} - (U_{eq} + (5\cos t - U_{eq})) e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_{eq}} =$$

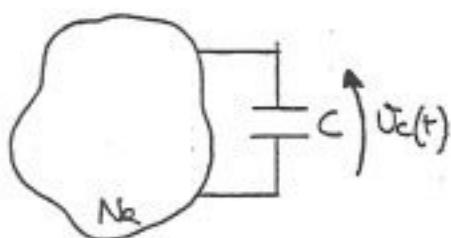
$$= \frac{U_{eq} - U_{eq} e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_{eq}} = \frac{5 + 2}{500} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ampere



C'aspettiamo che le corrente sia sempre positiva, visto che è la derivata di $U_c(t)$, ed essa è sempre crescente.

TRANSITORIO I° ORDINE



$$U_C(t) = (U_{CO} - E_{eq}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{eq}$$

$$\tau = R_{eq} \cdot C$$

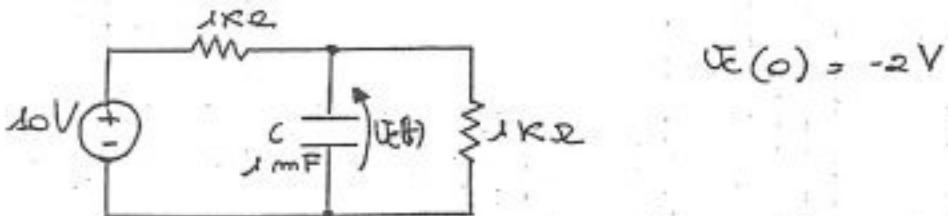
$$R_{eq} \neq 0 \quad R_{eq} \neq \infty$$

E_{eq}: tensione a vuoto; è la tensione sul condensatore al regime costante.

A regime, $U_C(t)$ è come nella formula quadratata, mentre $i_C(t) = 0$.

Diverso è nel caso dei generatori sinusoidali.

ESEMPIO:



$$R_{eq} = 500 \Omega$$

$$E_{eq} = 5 V$$

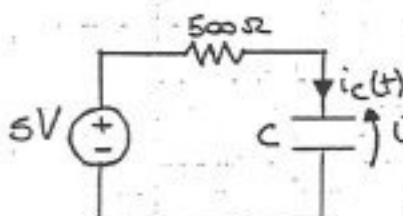
$$U_C(t) = -7 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 5$$

$$\tau = 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ sec}$$

Rossiamo trovare tutte le grandezze. In che modo?

Per sostituzione.

→ SOSTITUZIONE:



Questo circuito è comodo per determinare la $i_C(t)$.

$$i_C(t) = \frac{E_{eq} - U_C(t)}{Req} = \frac{E_{eq} - U_C}{Req} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{5+2}{500} \cdot e^{-\frac{t}{0,5}} = \frac{7}{500} \cdot e^{-\frac{t}{0,5}}$$

Dai conti effettuati si può vedere che abbiamo "costitutivo", o meglio abbiamo "Trattato" il condensatore come un generatore.

Consideriamo la forma costitutiva:

$$U_C(t) = (U_{Co} - E_{Eq}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{Eq}$$

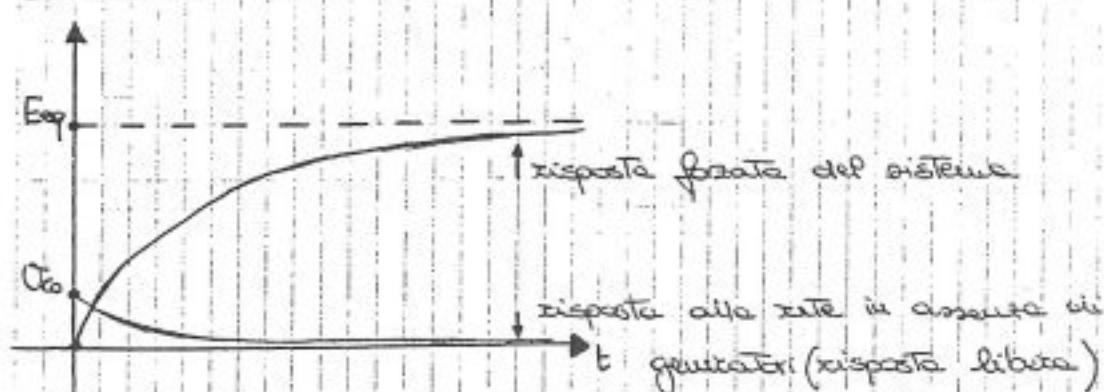
Tale forma è la somma tra un transitorio ed un regime. Potremo mettere in evidenza il termine delle condizioni iniziali:

$$U_C(t) = U_{Co} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + E_{Eq} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

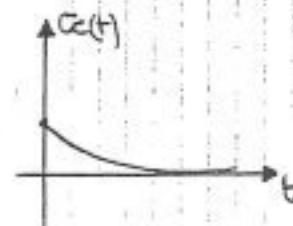
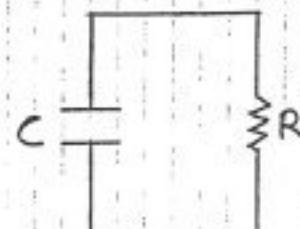
↓ ↓
RISPOSTA LIBERA del
SISTEMA + anche
RISPOSTA A INGRESSO
ZERO, cioè dovuta
soltamente alle
condizioni iniziali.

RISPOSTA FORZATA,
RISPOSTA A STATO ZERO

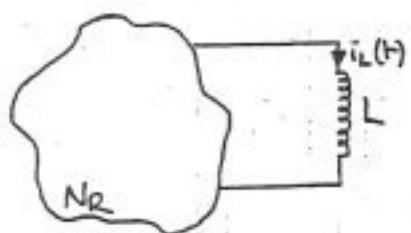
GRAFICAMENTE:



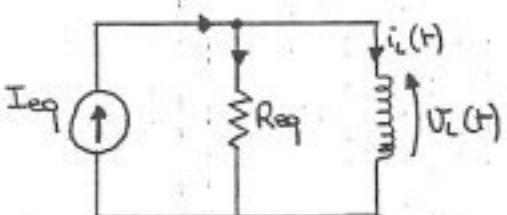
La risposta libera, è la risposta di una zeta fatta in tal modo:



Detto tutto questo, vediamo cosa succede quando nella rete è presente un induttore.



La "variabile di stato" in questo caso è la corrente, la quale esprime lo stato dell'induttore.
L'equivalente che qui usiamo è Norton:



$$V_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$i_L(t) + G_{eq} \cdot L \frac{di_L(t)}{dt} = I_{eq}$$

$$G_{eq} \cdot L = \tau$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{I_{eq}}{\tau} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\tau} = 0$$

polinomio caratteristico

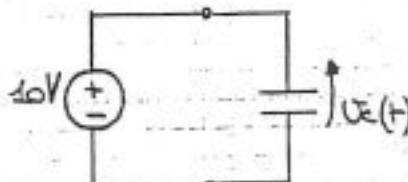
$$\lambda = -\frac{1}{\tau}$$

pulsazione naturale del sistema

$$i_L(t) = (i_{L0} - I_{eq}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + I_{eq}$$

CASI PARTICOLARI

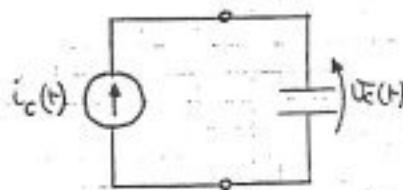
1° - La rete ammette Thévenin ma non Norton



$$U_c(t) = 10$$

$\tau = 0$ poiché è come se il transitorio avvenisse a velocità infinita ($R_{eq} = \infty$)

2° - La rete ammette Norton ma non Thévenin ($R_{eq} = 0$)



$$C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} = i_s(t)$$

Moltiplicando entrambi i membri per dt e integrando:

$$\int_{U_c(t_0)}^{U_c(t)} \frac{dU_c(t)}{dt} = \int_{t_0}^t i_s(t') dt'$$

Portando fuori dell'integrale C costante:

$$\int_{U_c(t_0)}^{U_c(t)} dU_c = \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^t i_s(t') dt' \Rightarrow U_c(t) = U_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_s(t') dt'$$

Possiamo osservare che:

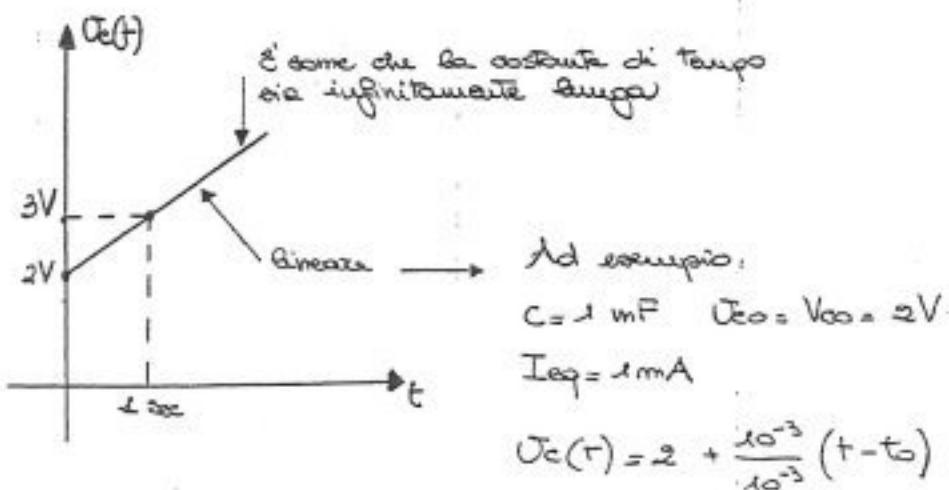
$$C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} = i_c(t)$$

$$C \cdot \frac{dU_c(t)}{dt} = 0, \text{ quanto vale la pulsazione naturale}$$

Il polinomio caratteristico che ottieniamo è $c \cdot \lambda = 0$, quindi la pulsazione naturale è $\lambda = 0$. Ciò significa che il sistema non è asintoticamente stabile, ma è solamente stabile.

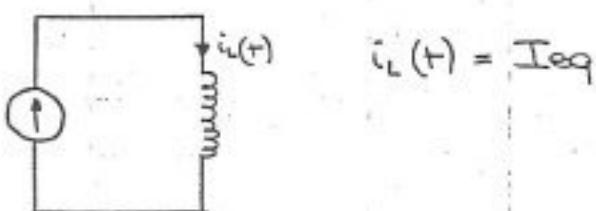
Se $i_s(t) = I_{eq}$ (cioè se è costante):

$$U_C(t) = U_{C0} + \frac{1}{C} \cdot I_{eq} (t - t_0)$$



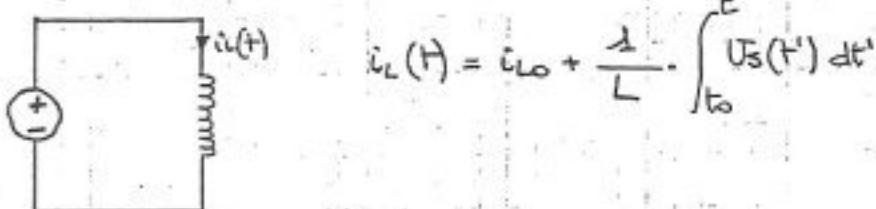
SULL' INDUCTORE ABBIANO I CASI DUALI:

1° -



$$i_L(t) = I_{eq}$$

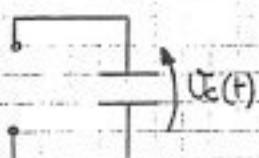
2° -



$$i_L(t) = i_{L0} + \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^t U_S(t') dt'$$

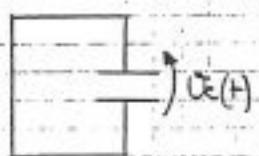
ALTRI CASI PARTICOLARI

1° -



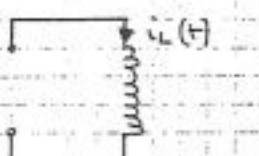
Il condensatore rimane carico alle condizioni di partenza.

2° -



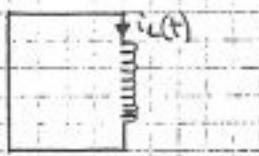
Il condensatore si scarica ISTANTANEAMENTE, lo $U_c(t)$ va istantaneamente a 0V. (perché $\dot{q} = 0$)

3° -



La corrente $i_c(t)$ al = 0, la corrente si è scaricata con costante di tempo pressoché (praticamente 0). Questo è l'analogo del caso 2.

4° -



La corrente $i_c(t)$ rimane al valore iniziale questo è l'analogo del caso 1.

PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DELLA VARIABILE DI STATO

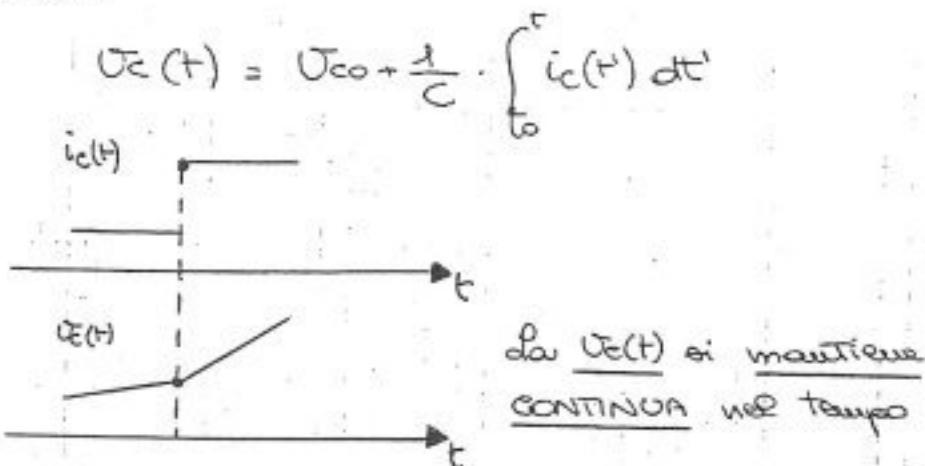
Consideriamo il caso del condensatore.

Se la corrente nel condensatore si mantiene limitata, la tensione si mantiene continua nel tempo:

se $|i_c(t)| < \infty$ allora $U_c(t) \in C^0$ (limitata nel tempo)

cioè il $\lim_{t \rightarrow t_0} U_c(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} U_c(t)$

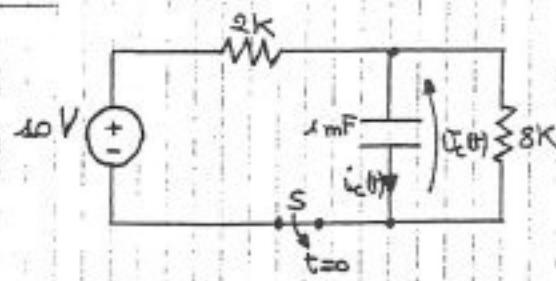
Questo poiché:



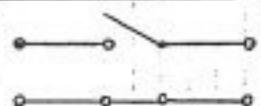
Nel caso opposto, cioè se $U_c(t)$ avesse, un salto, la corrente in quell'istante avrebbe ∞ .

(noi comunque supponiamo che nei circuiti che analizziamo ciò non accada mai).

ESEMPIO:



INTERRUTTORE:



aperto non passa corrente

chiuso è come un cortocircuito, $R=0$

L'interruttore S è chiuso da molto tempo (cioè da $t=-\infty$).

Cioè vuol dire che il sistema ha raggiunto il regime.

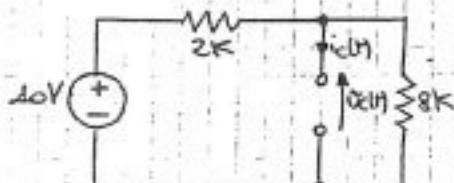
Per $t_0=0$ S si apre.

? Determinate la $V_c(t)$ e $i_c(t)$ per $t \in [0^-; +\infty)$

→ Consideriamo il circuito quando l'interruttore è chiuso ($t<0$)

Determiniamo ora la $V_c(0)$

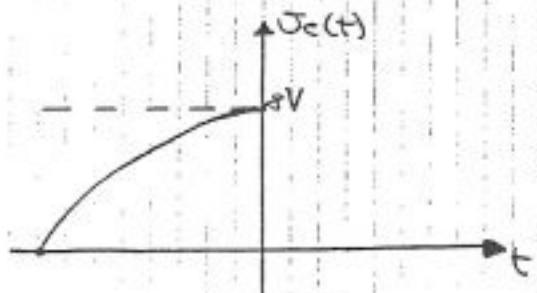
$V_c(0)$ è l'equivalente Thévenin del circuito:



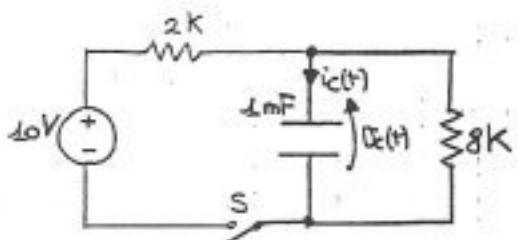
$$V_c(0) = 8 \text{ V} \quad (\text{dal parallelo di Tevenin})$$

$i_c(0^-) = 0 \text{ A}$, al regime è 0 A, perché al condensatore abbiamo sostituito un circuito aperto

Quindi, nel passato:



→ l'interruttore si apre



La parte sinistra del circuito dà un circuito aperto, quindi non va più considerato, mentre resta la rete del condensatore con la resistenza di 8k.

$$U_C(0) = 8V$$

$$\dot{Q}_m \text{ a regime} = 0$$

Quindi abbiamo solamente la risposta libera del sistema:

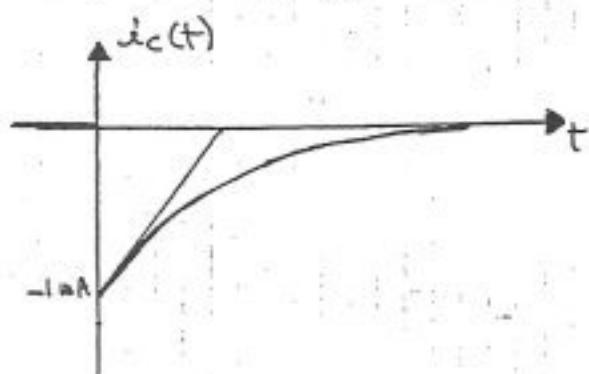
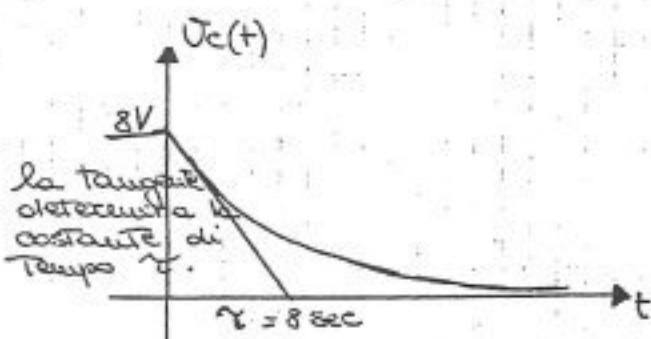
$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 \cdot e^{-\frac{t}{8}} V$$

$$\tau = C \cdot R = 8 \cdot 10^3 = 8 \text{ sec}$$

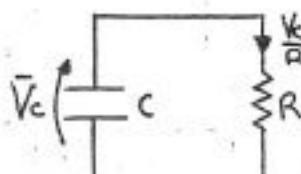
$$i_C(t) \quad t > 0$$

$$i_C(t) = -\frac{U_C(t)}{8 \cdot 10^3} = -\frac{1}{10^3} \cdot e^{-\frac{t}{8}} \text{ A}$$

per $t=0$ $i_C(t) = -1 \text{ mA}$

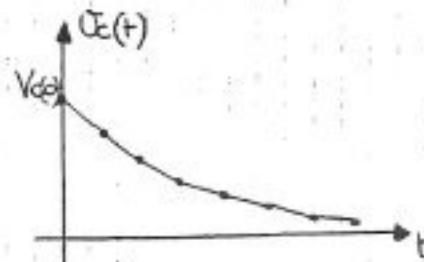


SPUNTO TEORICO:

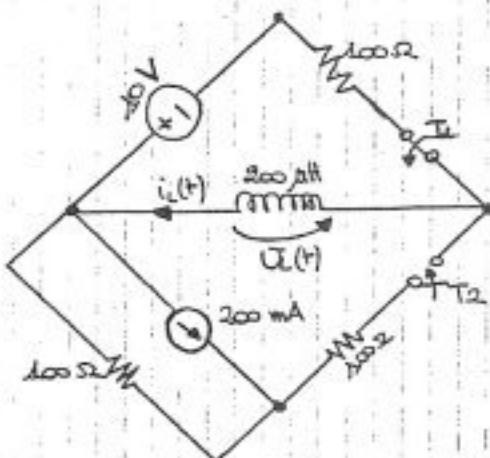


questo fattore positivo o negativo determina la stabilità del sistema

$$C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} = -\frac{V_C}{R}$$



ESEMPIO:



T₁ chiuso

T₂ aperto

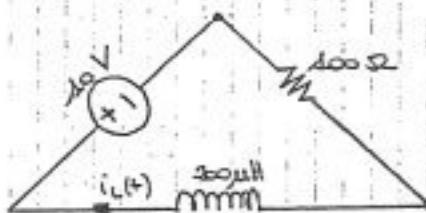
Da t=t₀=0

T₁ aperto, T₂ chiuso

? i_L(t) ? V_L(t)

→ prendiamo t<0

Per t<0 l'induttore vede solamente:



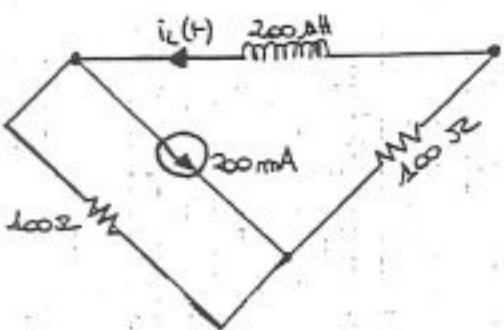
Il generatore di corrente gira tutto sulla sua R.

In condizioni stazionarie l'induttore è un cortocircuito, quindi:

$$i_L(0) = -\frac{10}{100} = -0,1 \text{ A}$$

V_L(0)= 0 V, in quanto le derivate delle correnti

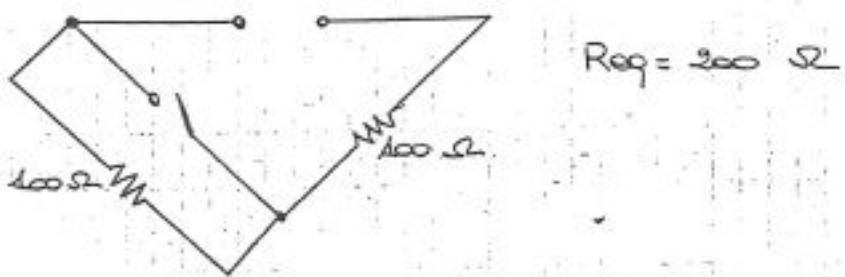
→ O due interruttori commutano



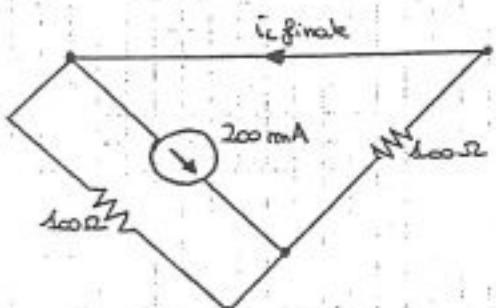
A questo punto possiamo applicare Norton e Thévenin.

Troviamo la Req vista dai due morsetti e poi le correnti di cortocircuito.

→ Calcolo di Req



→ Calcolo di Ieq



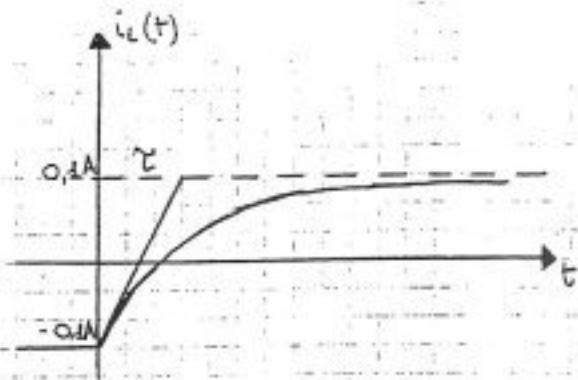
$$i_{L\text{finale}} = 200 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{100+200} = 100 \text{ mA}$$

$$I_{eq} = 0.1 \text{ A}$$

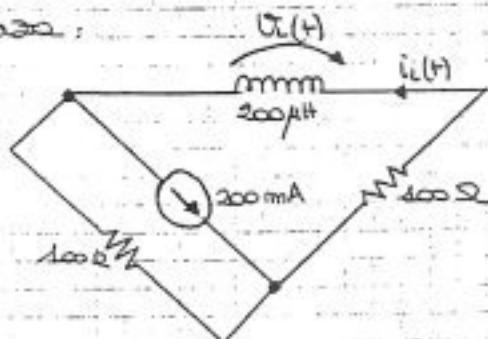
A questo punto riappiamo sull'asse la forma analitica di $i_L(t)$.

$$i_L(t) = (-0,1 - 0,1) \cdot e^{-5t} + 0,1$$

$$\tau = G_{eq} \cdot L = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{200} = 1 \text{ msec}$$



Ora cerchiamo di trovare $U_L(t)$. Potremmo fare la derivate di $i_L(t)$, ma utilizziamo come verifica il metodo visto in precedenza.



Cerchiamo $U_L(t)$ in 0^+ , e già si potesse aspettare che avrà un andamento esponenziale.

$$U_L(t) = -i_L(t) \cdot 100 + (0.2 - i_L(t)) \cdot 200 \quad \text{è la KVL}$$

$$= -i_L(t) \cdot 200 + 0.2 \cdot 200 = (0.2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 200 - 0.2 \cdot 200) + 0.2 \cdot 100$$

N.B. se avessimo usato $U_L(0^-)$, nella formula qui sopra avrebbe anche $i_L(t)$ dovremmo usato $-i_L(0)$

$$U_L(0^+) = 0.1 \cdot 200 + 20 = 40 \text{ V}$$

$$U_L(t) = 40 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

