

Il Modello Circuitale

Il termine generico di *sistema elettrico* indica realtà fisiche molto diverse tra loro.

Sistema elettrico è infatti la rete di distribuzione dell'energia elettrica che dalle centrali di produzione trasporta l'energia presso le nostre abitazioni o ai grandi impianti industriali o che alimenta le linee elettriche del trasporto metropolitano e dei treni. Tale rete ha dimensioni enormi e si estende su tutto il territorio nazionale.

Sistemi elettrici sono pure i circuiti integrati della nano-elettronica, quale ad esempio i processori dei personal computer, nei quali in pochi millimetri quadrati vengono realizzati reti elettriche formate da milioni di dispositivi elementari.

Nonostante la spaventosa differenza di scala geometrica, il comportamento essenziale di questi sistemi può venire descritto dallo stesso modello matematico che indichiamo col nome di *modello circuitale*.

In questo capitolo e nel successivo introduciamo gli strumenti che ci permettono di descrivere il modello circuitale partendo dalle sue origine fisiche legate ai fenomeni elettrici.

Le grandezze descrittive dei fatti elettrici

Gli uomini hanno imparato a descrivere e dominare i *fenomeni elettrici* ammettendo che essi siano dovuti ad una proprietà della materia chiamata *carica elettrica*.

Esistono due tipi distinti di carica elettrica, indicati convenzionalmente come cariche di tipo positivo e di tipo negativo.

Tra le cariche elettriche nascono delle interazioni cioè delle forze.

E' noto che tra due cariche dello stesso tipo e di dimensioni trascurabili, cioè puntiformi, esiste una forza che tende a respingerle mentre tra due cariche di tipo opposto la forza tende ad attrarle l'un l'altra.

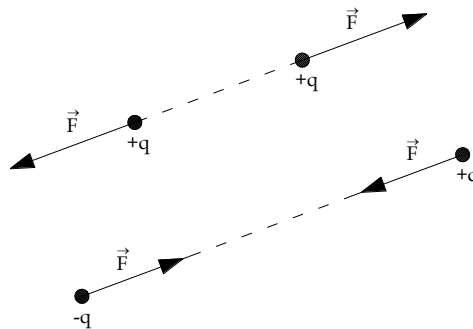


Figura 1:

Gli atomi che formano la materia sono composti a loro volta da particelle che possiedono sia carica positiva che negativa in egual numero e che tendono quindi a neutralizzarsi vicendevolmente. Questo fa sì che a livello macroscopico i corpi materiali non manifestano particolari effetti elettrici. Per “scatenare” tali fenomeni è necessario che attraverso una qualche azione, alcune cariche di un tipo vengano sottratte al corpo in modo che le cariche dell'altro segno prevalgano.

E' allora evidente che per sottrarre alcune cariche al corpo è necessario applicare una forza che vinca la forza di tipo attrattivo che lo lega alle altre cariche del corpo, cioè è necessario compiere un *lavoro*. Un primo aspetto comune a tutti i fenomeni elettrici è che affinché essi si manifestino deve esistere una azione attraverso cui si separano cariche elettriche di tipo opposto eseguendo un lavoro.

Il primo esperimento in cui l'elettrizzazione della materia avveniva in modo controllato, fu quello eseguito da Alessandro Volta attorno all'anno 1800 quando riuscì a costruire il primo esempio di pila elettrica.

La pila di Volta è composta da dischi di rame e zinco disposti in modo alternato uno sull'altro interponendo tra loro una spugna bagnata imbevuta di sale.

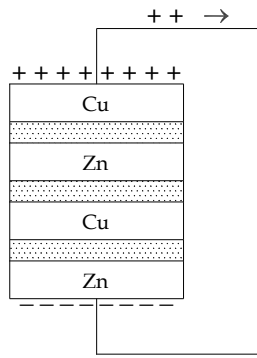


Figura 2:

Per effetto della *reazione chimica* che si sprigiona tra i due metalli, alcuni atomi con un eccesso di carica positiva, detti ioni positivi, vengono spostati verso l'alto mentre contemporaneamente ioni negativi si spostano all'altro capo. Il lavoro proveniente dalla reazione chimica si trasforma nel lavoro elettrico necessario per attuare la separazione delle cariche. A. Volta si accorse che quando due fili metallici collegati agli estremi della pila venivano impugnati si avvertiva la sensazione di essere attraversati da un fluido, una sensazione che oggi potremmo definire elettrizzante. Alla luce delle nostre conoscenze oggi sappiamo che ciò accade perché gli ioni positivi e negativi separati dal lavoro chimico della pila si ricongiungono muovendosi lungo il cammino che si viene a formare lungo i due conduttori metallici e l'uomo che li impugna. Si viene così a formare un circuito chiuso lungo cui le cariche si mettono in movimento dando vita ad un flusso di carica.

L'esperimento mette in luce due aspetti della manifestazione elettrica:

- a) esiste un dispositivo, la pila, che funziona come *generatore* del fatto elettrico in quanto è in grado di separare le cariche svolgendo un lavoro;
- b) si instaura un movimento di cariche lungo un percorso chiuso.

L'esperimento della pila di Volta rappresenta un caso elementare di *circuito elettrico* e ad ognuno dei due aspetti fondamentali dell'esperimento siamo in grado di associare una *grandezza elettrica descrittiva* del fenomeno.

La **tensione elettrica** è una grandezza fisica che noi associamo ad una linea orientata nello spazio γ , cioè su cui fissiamo un verso di percorrenza, che congiunge due punti A e B.

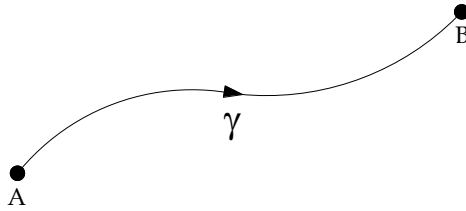


Figura 3:

Chiamo tensione elettrica lungo la linea γ e la indichiamo come $v(\gamma)$ il lavoro elettrico che *noi* dobbiamo compiere in antagonismo alle forze elettriche per muovere lungo tale linea una carica di prova positiva e unitaria.

L'unità di misura della tensione è chiamata il volt (simbolo V).

Chiaramente il lavoro da noi svolto sarà positivo se il movimento della carica di prova avviene effettivamente in opposizione alle forze elettriche che agiscono su di essa oppure sarà negativo (cioè non svolto da noi ma assorbito) se il movimento avviene lungo le forze elettriche. Pertanto la tensione elettrica è una grandezza dotata di segno.

Si supponga ora di misurare il flusso di carica all'interno di un filo metallico, contando le cariche che passano attraverso una sezione σ del filo. A tal fine fissiamo un verso di attraversamento come positivo cioè orientiamo la superficie σ e contiamo la quantità netta di carica positiva che attraversa la superficie.

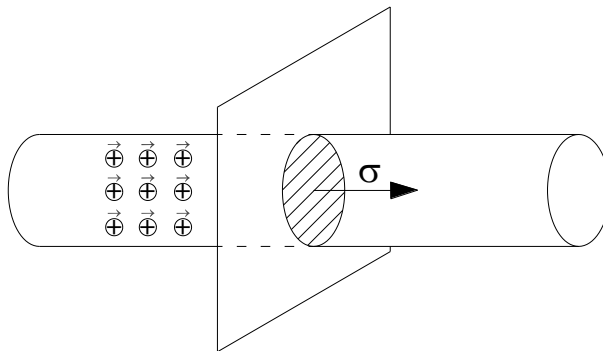


Figura 4:

La **corrente elettrica** è una grandezza descrittiva associata alla superficie σ orientata, indicata come $i(\sigma)$, e definita come la quantità di carica elettrica positiva che attraversa la sezione nell'unità di tempo.

L'unità di misura della corrente è chiamata **ampère** (simbolo A).

Anche il valore della corrente è dotato di segno, ad indicare se il flusso delle cariche positive è concorde o discorde rispetto al senso di attraversamento fissato sulla superficie.

Gli strumenti di misura

Per potere rilevare operativamente le grandezze tensione e corrente sono stati costruiti appositi strumenti di misura che chiamiamo *voltmetro* ed *amperometro*.

I due strumenti sono composti da un organo di lettura che fornisce il valore della grandezza in modo digitale o analogico, due morsetti contraddistinti dal segno più e meno (oppure dal colore rosso e nero) e una coppia di cordoni terminanti in due puntali metallici.

I cordoni costituiscono la sonda dello strumento che si adagia sull'ente geometrico lungo cui o attraverso cui si esegue la misura.

Per la misura di tensione i cordoni del voltmetro vengono disposti lungo la linea γ come mostrato in figura.

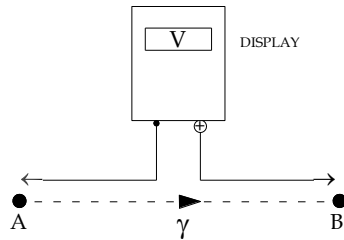


Figura 5:

Si noti che il verso di misura indotto sulla linea è quello che entra dal morsetto “meno” ed esce dal “più”. La misura di corrente richiede che il filo metallico in cui scorre il flusso di cariche venga sezionato lungo σ come mostrato in figura e che i puntali dell’amperometro si **appoggino** sulle due facce che si vengono a formare. In questo caso, l’orientamento indotto sulla superficie σ è il verso di attraversamento che va dal morsetto meno al più dell’amperometro.

Osserviamo che da un punto di vista matematico, **le misure** di tensione o di corrente istituiscono una relazione che ad un ente geometrico astratto fa corrispondere uno ed un solo numero reale (**dotato di segno**). Si dirà allora che lungo una certa linea orientata vi è una tensione di **-2.1V o di 5.0V** o che la corrente che attraversa una certa superficie orientata vale 0.5A o -3mA ecc...

Proprietà della tensione e della corrente

L’uso del voltmetro e dell’amperometro mostra che la misura di tensione e quella di corrente godono **della** proprietà di essere *dispari* e della proprietà *additiva*. Per la tensione indichiamo con γ una linea orientata diretta dal punto A al punto B e con $-\gamma$ la stessa linea ma orientata nel verso opposto, cioè che va da B ad A.

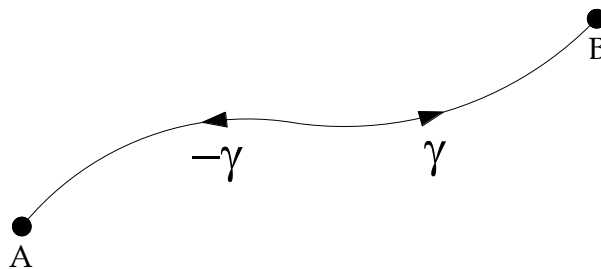


Figura 6:

Operativamente la misura di tensione lungo $-\gamma$ si ottiene invertendo l’inserimento dei morsetti del voltmetro. Vale la proprietà di disparità:

$$-v(\gamma) = v(-\gamma)$$

La disparità ha l’ovvio significato che il lavoro svolto per spostare la carica di prova da A a B è lo stesso in modulo ma opposto in segno a quello che si svolge per spostarla da B ad A.

Ora consideriamo la linea orientate γ_1 che va da A a B e la linea γ_2 che va da B a C.

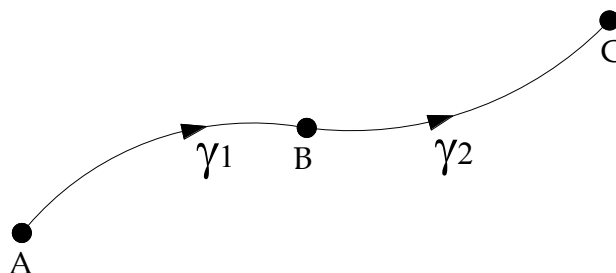


Figura 7:

La loro unione dà origine alla linea complessiva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ che va da A a C.

Sia $v_1=v(\gamma_1)$ la tensione misurata lungo γ_1 e $v_2=v(\gamma_2)$ la tensione misurata lungo γ_2 .

Indichiamo poi con $v=v(\gamma)$ la misura lungo la linea complessiva.

Vale allora la proprietà additiva della tensione:

$$v = v(\gamma_1 \cup \gamma_2) = v(\gamma_1) + v(\gamma_2) = v_1 + v_2$$

Combiniamo ora le due proprietà e consideriamo le tre linee γ_1 , γ_2 e γ_3 orientate come mostrato in figura (cioè con γ_2 orientata in modo discorde alle altre) e la linea unione $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3$.

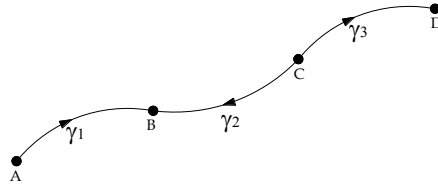


Figura 8:

Abbiamo eseguito le relative misure di tensione v_1 , v_2 e v_3 . Dalla proprietà di disparità si ha che $v(-\gamma_2)=-v_2$ e dunque applicando la proprietà di additività concludiamo che:

$$v = v(\gamma_1 \cup -\gamma_2 \cup \gamma_3) = v_1 - v_2 + v_3$$

La misura di tensione lungo un cammino orientato è dato dalla somma algebrica (cioè con segno) delle misure eseguite lungo i tratti parziali, prendendo con segno positivo le misure eseguite con orientamento concorde al cammino e con segno negativo le discordi.

Passiamo a considerare la corrente e indichiamo con σ una superficie orientata come in figura e con $-\sigma$ la stessa superficie ma orientata nel verso opposto.

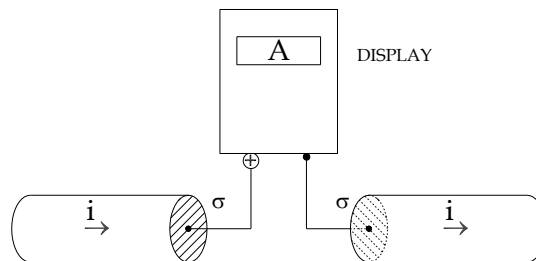


Figura 9:

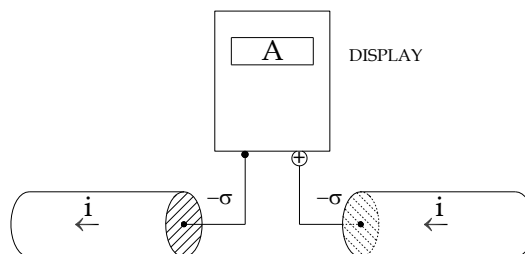


Figura 10:

Notate che orientare una superficie significa specificare il verso con cui la si attraversa.

Operativamente, la misura di corrente lungo $-\sigma$ si ottiene invertendo l'inserimento dei morsetti dell'amperometro.

Vale la proprietà di disparità:

$$-i(\sigma) = i(-\sigma)$$

Ora consideriamo le superfici σ_1 e σ_2 , orientate in modo concorde e che condividono parte della loro frontiera. La loro unione dà origine alla superficie complessiva $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ indicata in figura.

MANCA LA FIGURA

Se $i_1 = i(\sigma_1)$ e $i_2 = i(\sigma_2)$ sono i valori delle misure delle correnti attraverso le superfici parziali mentre $i = i(\sigma)$ è la misura attraverso la superficie complessiva, la proprietà additiva delle correnti dice che:

$$i = i(\sigma_1 \cup \sigma_2) = i(\sigma_1) + i(\sigma_2) = i_1 + i_2$$

Infine siano σ_1 , σ_2 e σ_3 tre superfici orientate come in figura e cioè con σ_3 orientata in modo discorde alle prime due e sia $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup (-\sigma_3)$.

Si sono eseguite le relative misure di corrente i_1 , i_2 e i_3 .

Dalla proprietà di disparità si ha che $i(-\sigma_3) = -i_3$ e dall'additività che:

$$i = i(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup -\sigma_3) = i_1 + i_2 - i_3$$

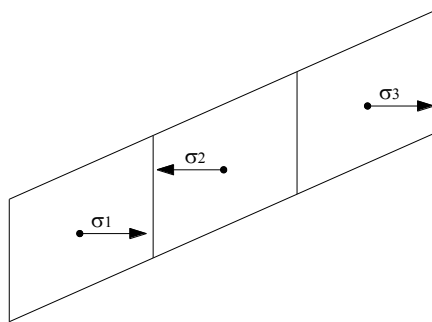


Figura 11:

La misura di corrente attraverso una superficie orientata è dato dalla somma algebrica (cioè con segno) delle misure eseguite attraverso le sottosuperfici parziali che la formano prendendo con segno positivo le misure eseguite con orientamento concorde e con segno negativo le discordi.

Legge delle Tensioni e delle Correnti

Le tensioni e le correnti che misuriamo in un sistema elettrico, possono variare nel tempo a seconda dello stato e del modo di funzionamento del sistema; per esempio è chiaro che all'accensione di una apparecchiatura elettrica si assiste a delle fasi transitorie in cui è naturale attendersi che le tensioni e le correnti varino in modo significativo. Nella fase iniziale del nostro studio supporremo tuttavia che tutte le grandezze elettriche siano in condizione di regime stazionario (cioè costanti nel tempo) o comunque che le loro variazioni nel tempo siano molto lente. Nel capitolo xxx riprenderemo e generalizzeremo la nostra analisi.

In un sistema elettrico operante in regime stazionario, detto anche in continua o in DC (direct current), vale rigorosamente la proprietà seguente:

lungo una linea γ chiusa, cioè tale che il punto di partenza e di arrivo coincidono, la tensione elettrica vale zero, $v(\gamma) = 0$.

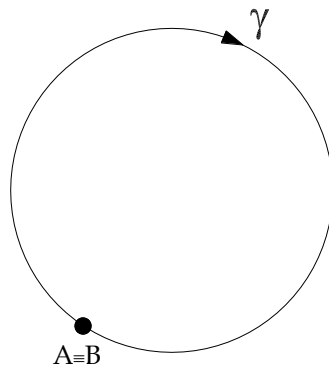


Figura 12:

Supponiamo di dividere la linea chiusa in due percorsi parziali γ_1 e γ_2 come in figura e di eseguire le misure parziali di tensione v_1 e v_2 .

Per la proprietà additiva, la legge delle tensioni diventa: $v_1 + v_2 = 0$.

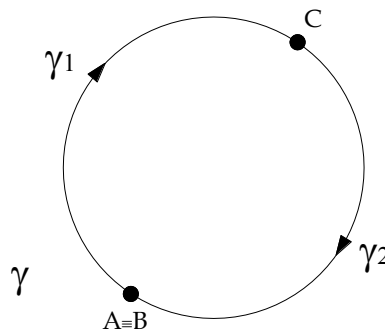


Figura 13:

Generalizzando, possiamo dedurre la seguente legge fondamentale.

Legge delle tensioni: la somma algebrica (cioè tenendo conto dei segni) delle tensioni misurate lungo una linea γ chiusa è uguale a zero.

Dalla legge delle tensioni nasce anche un'altra importante conseguenza. Con riferimento alla figura si considerino le due linee γ_1 e γ_3 che dal punto A=B portano lungo percorsi alternativi al punto C. Per la legge delle tensioni, con attenzione ai segni, si ottiene che $v_1 - v_3 = 0$ o alternativamente che $v_1 = v_3$.

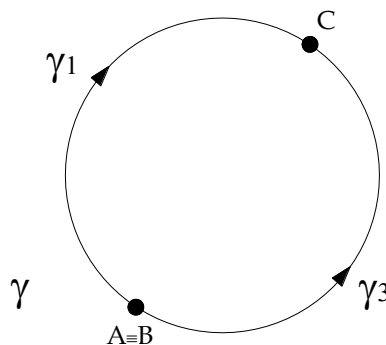


Figura 14:

Questo indica che tensioni misurate lungo cammini diversi ma che collegano gli stessi punti estremi A e C danno lo stesso valore.

In regime stazionario dunque, la tensione dipende solo dagli estremi del cammino lungo cui è misurata e viene indicata in modo sintetico come v_{CA} intendendola come la tensione del punto C rispetto al punto A.

Per ciò che riguarda la corrente, in DC, vale la seguente proprietà:

la corrente elettrica totale che attraversa una superficie chiusa σ orientata è sempre zero: $i(\sigma) = 0$.

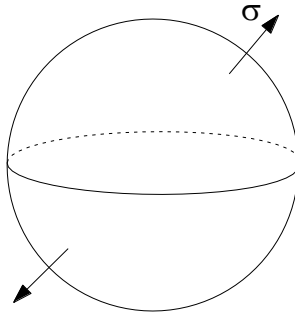


Figura 15:

Ora si supponga che σ sia formata da due superfici parziali σ_1 e σ_2 orientate positive nel verso **uscente** come mostrato in figura e di avere eseguito le misure parziali di corrente i_1 e i_2 .

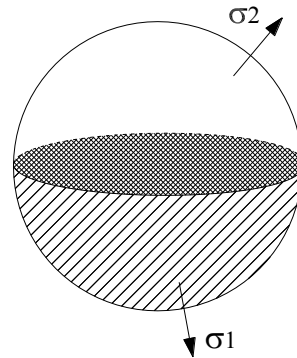


Figura 16:

Dalla suddetta proprietà e dalla additività delle correnti si ha che $i_1 + i_2 = 0$. Generalizzando possiamo dedurre la seguente fondamentale legge.

Legge delle correnti: la somma algebrica (cioè tenendo conto dei segni) delle correnti misurate attraverso una superficie σ chiusa è uguale a zero.

Un modo alternativo di enunciare la legge delle correnti può essere dedotto pensando la superficie σ composta dall'unione della superficie σ_1 orientata **uscente** e dalla superficie σ_3 con orientamento positiva **entrante** e le relative misure i_1 e i_3 . In questo caso si ha che $i_1 - i_3 = 0$ oppure anche che $i_1 = i_3$. Ciò si sintetizza dicendo che la corrente totale che entra in una superficie chiusa è pari alla corrente totale che ne fuori esce.

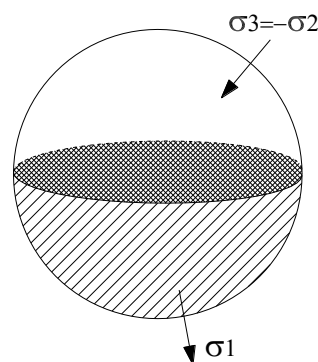


Figura 17:

Il circuito elettrico

Le grandezze elettriche e le loro proprietà sono state fino a qui descritte in termini astratti riferendosi ad una regione qualunque di spazio. Passiamo ora ad ambientarle nella struttura particolare di un circuito elettrico inteso come interconnessione di un certo numero di dispositivi elementari.

I dispositivi elettrici sono fabbricati combinando materiali che da un punto di vista elettrico possiedono proprietà opposte: gli isolanti **ed** i conduttori.

Per isolante ideale noi intendiamo un materiale che a fronte della applicazione di una tensione elettrica finita $v \neq 0$, per esempio applicandogli una pila elettrica, sia attraversato da una corrente nulla $i = 0$. Un tale materiale dunque si oppone al passaggio di corrente anche in presenza di tensioni significative. Materiali isolanti sono per esempio la carta, il legno o la plastica.

Viceversa un materiale conduttore ideale è quello in cui può circolare una corrente finita $i \neq 0$ anche in assenza di tensione $v = 0$. Un conduttore reale è quello che consente la circolazione di correnti significative anche in presenza di tensioni molto piccole. Materiali conduttori sono tutti i metalli o l'acqua. Alle due categorie estreme ora introdotte si deve aggiungere quella dei semi-conduttori i quali in natura presentano proprietà elettriche intermedie tra il conduttore e l'isolante e possono essere trasformati nell'uno o nell'altro attraverso opportuni trattamenti tecnologici. La loro grande flessibilità ha di fatto reso possibile l'enorme sviluppo della micro-elettronica.

Un dispositivo elementare è avvolto da una superficie di materiale isolante attraverso la quale non può esserci passaggio di carica, cioè corrente. Questa superficie isolante ha la funzione di confinare la parte interna del dispositivo dall'ambiente esterno e di protezione. La superficie isolante è poi attraversata in pochi punti da parti di materiale conduttore che funzionano come tramite o porta con l'ambiente esterno. Tali parti conduttrici vengono chiamate **terminali o morsetti o ancora poli** del dispositivo.

L'interazione elettrica del dispositivo con l'ambiente esterno avviene esclusivamente attraverso i suoi poli. La **figura** seguente mostra esempi di dispositivi con 2, 3 o quattro poli a cui daremo il nome rispettivamente di bipolo tripolo e quadripolo.

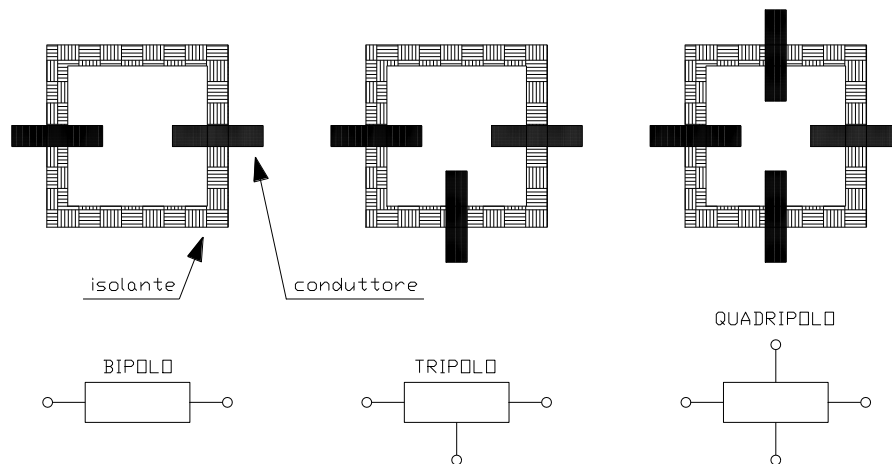


Figura 18:

In questa fase iniziale ci limitiamo a considerare il caso semplice di dispositivi con due poli e consideriamo circuiti formati connettendo un numero arbitrario di bipoli elettrici.

I punti in cui i terminali dei bipoli vengono collegati tra loro vengono detti i nodi del circuito.

Il circuito in figura contiene 6 bipoli ed ha 4 nodi.

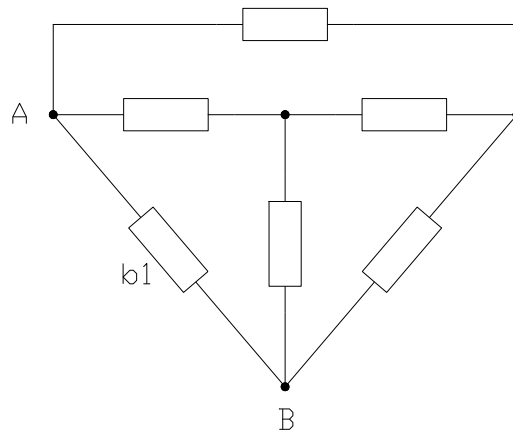


Figura 19:

Caratterizziamo elettricamente il bipolo b_1 collegato ai nodi A e B inserendo opportunamente gli strumenti voltmetro e amperometro. L'inserimento del voltmetro avviene collegando i puntali ai due morsetti del bipolo in modo che lungo il voltmetro cada la tensione da misurare; si dice che **il voltmetro** viene collegato in parallelo.

L'inserimento dell'amperometro avviene tagliando il filo ad uno dei morsetti ed inserendo lo strumento in modo che sia attraversato dalla corrente da misurare; si dice che **l'amperometro** viene collegato in serie. Notate dalla figura come tale inserimento corrisponda a rilevare la misura della tensione V_{AB} cioè della tensione del morsetto o nodo A rispetto al morsetto o nodo B e della corrente i_A entrante nel bipolo dal morsetto A.

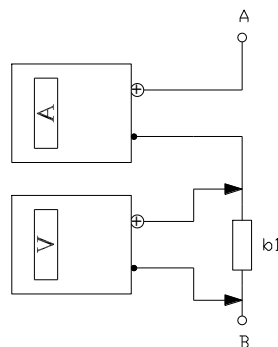


Figura 20:

La particolare modalità di inserimento verrà indicata d'ora in poi semplicemente indicando accanto al bipolo un arco di linea orientato che dà il verso della misura della tensione e sul filo in corrispondenza al terminale una freccia che indica il verso della misura di corrente.

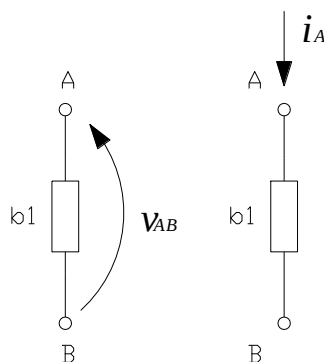


Figura 21:

Nel linguaggio comune diremo semplicemente che V_{AB} e i_A sono la tensione e la corrente del bipolo, sotto intendendo che ci si riferisce alla loro misura e come tale può assumere un valore positivo o negativo.

Si supponga ora di misurare al terminale B la corrente entrante i_B .

Dalla legge delle correnti assumendo una superficie chiusa che avvolge b_1 ricaviamo:

$$i_B = -i_A$$

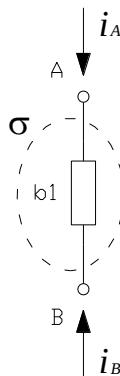


Figura 22:

che ci dice che la misura al terminale B si deduce da quella eseguita in A.

Concludiamo dunque che ai capi di un bipolo esiste solo una corrente indipendente che ne caratterizza completamente il flusso di carica. Ragioniamo ora sulle tensioni e supponiamo di misurare la tensione v_{BA} cioè del morsetto **B** rispetto al morsetto **A**.

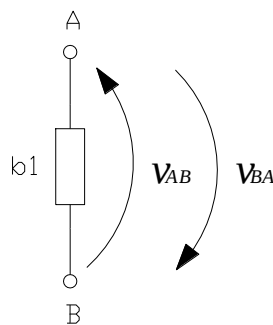


Figura 23:

Dalla legge delle tensioni ricaviamo che:

$$v_{BA} = -v_{AB}$$

e dunque che ai capi di un bipolo esiste solo una tensione indipendente che ne caratterizza completamente il lavoro elettrico svolto per spostare lungo il bipolo una carica di prova.

Quindi, un dispositivo elettrico con due morsetti è *descritto completamente da una corrente e da una tensione*; si dice anche che i due morsetti con le relative grandezze formano *una porta elettrica* o anche *un lato*.

A questo punto è bene precisare che la modalità di misura della corrente e della tensione possono essere coordinate tra di loro, cioè abbinate tra loro in due modi distinti.

La figura seguente mostra un primo modo di abbinare le due misure prendendo il verso di misura della corrente entrante dal morsetto a cui è rivolta la freccia dell'orientazione di misura della tensione.

MANCA FIGURA

Questa modalità viene riferita come *convenzione degli utilizzatori*. La figura seguente mostra un modo alternativo di coordinare le misure prendendo il verso della corrente uscente dal morsetto a cui è rivolta la freccia della tensione. Questa modalità si dice *convenzione dei generatori*.

MANCA FIGURA

Leggi di Kirchhoff

Siamo ora in grado di ritornare al circuito completo di partenza in cui numeriamo i sei lati e i quattro nodi come in figura.

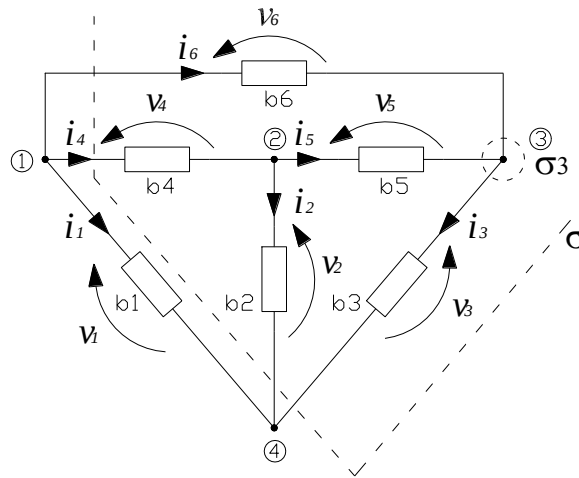


Figura 24:

Ogni bipolo è descritto elettricamente da una tensione e da una corrente che supponiamo misurate con la convenzione degli utilizzatori.

Rivediamo la legge delle correnti ambientandola sul circuito. Per questo prendiamo la superficie chiusa σ indicata in figura e la orientiamo dall'interno verso l'esterno. Notiamo che per costruzione in un circuito elettrico le correnti possono circolare solo nei bipoli e nei loro terminali esterni e che la superficie σ interseca i morsetti dei bipoli b_2 , b_3 , b_4 e b_6 .

La legge delle correnti diventa:

$$i_3 + i_2 - i_4 - i_6 = 0$$

In termini generali possiamo allora enunciare la seguente

Legge di Kirchhoff delle correnti: la somma algebrica (cioè con segno) delle correnti (cioè delle misure di corrente) dei bipoli i cui terminali vengono intersecati da una superficie chiusa è sempre zero.

Si consideri ora la superficie chiusa indicata con σ_3 che circonda il nodo 3.

La superficie interseca esclusivamente i morsetti dei bipoli che sono collegati al nodo, cioè b_3 , b_5 e b_6 .

Orientando la superficie dall'interno all'esterno, la legge di Kirchhoff delle correnti diventa nel caso particolare:

$$i_3 - i_5 - i_6 = 0$$

e si può enunciare nel modo seguente:

la somma algebrica (cioè con segno) delle correnti che escono (o in modo del tutto equivalente che entrano) da un nodo di un circuito è sempre zero.

Passiamo ora alle tensioni e ci focalizziamo sulla linea chiusa γ_1 che corrisponde al percorso che dal nodo 4 va al nodo 1 al nodo 2 e infine torna in 4 muovendosi in senso orario.

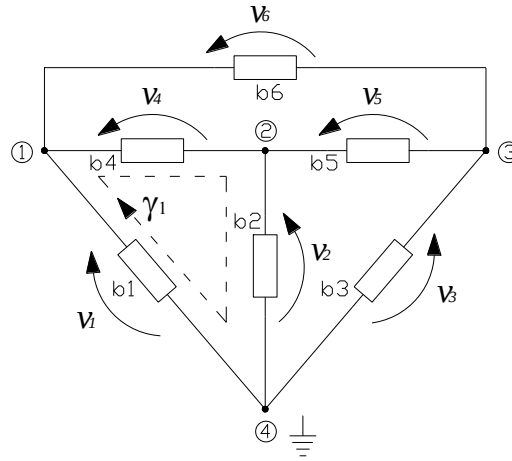


Figura 25:

Attualizziamo la legge delle tensioni osservando ora che ogni tratto del percorso chiuso corrisponde alla tensione misurata su di un bipolo.

Si ha:

$$v_1 - v_4 - v_2 = 0$$

In un circuito indichiamo con il nome di cammino la sequenza ordinata di bipoli (o lati) che si incontrano muovendosi lungo un certo percorso e con il nome di maglia indichiamo un cammino chiuso.

In un circuito la legge delle tensioni viene enunciata nella seguente

Legge di Kirchhoff delle tensioni: la somma algebrica delle tensioni misurate lungo una maglia è sempre zero.

Riscriviamo la legge delle tensioni portando a membro di destra i termini negativi, si ha:

$$v_1 = v_2 + v_4$$

Notate che v_1 è la tensione lungo il percorso che va da 4 a 1 passando dal bipolo b_1 mentre $v_2 + v_4$ è la tensione lungo un diverso percorso che va da 4 a 1 ma passando per i bipoli b_2 e b_4 .

La legge di Kirchhoff delle tensioni ci conferma che la tensione elettrica misurata tra due nodi qualunque di un circuito elettrico è sempre la stessa indipendentemente dal percorso lungo cui avviene la misura. Questo ci permette di introdurre il concetto di *tensione di nodo o potenziale di nodo*.

Allo scopo, si assuma in modo arbitrario un nodo del circuito come nodo di riferimento, per esempio in figura il nodo 4, e si misurino le tensioni degli altri nodi rispetto al nodo di riferimento.

La tensione relativa di un nodo rispetto al riferimento è detta tensione di nodo o potenziale e viene indicata con la lettera “e” mettendo al pedice il numero del nodo di misura.

Nella figura, prendendo 4 come riferimento, si hanno le tensioni di nodo e_1 , e_2 ed e_3 .

Notiamo che dalla conoscenza dei potenziali nei nodi è possibile ricavare le tensioni dei bipoli. In generale infatti si ha che per il generico bipolo connesso tra il generico nodo k e il nodo j , in cui indichiamo con e_k e e_j i rispettivi potenziali ai nodi, la tensione v misurata ai capi del bipolo viene denominata v_{kj} e vale:

$$v_{kj} = e_k - e_j$$

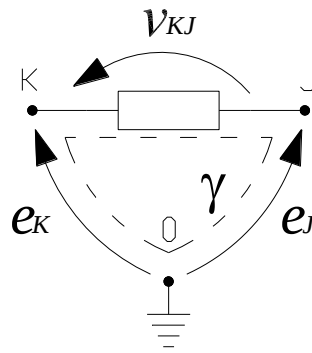


Figura 26:

Concludiamo il capitolo svolgendo un esercizio.

E' dato il circuito composto da 12 bipoli e 8 nodi rappresentato in figura in cui sono state misurate le correnti $i_1 = 2A$; $i_7 = -5A$; $i_8 = 1A$; $i_{11} = 5A$; $i_{12} = -3A$ corrispondenti ai bipoli anneriti.

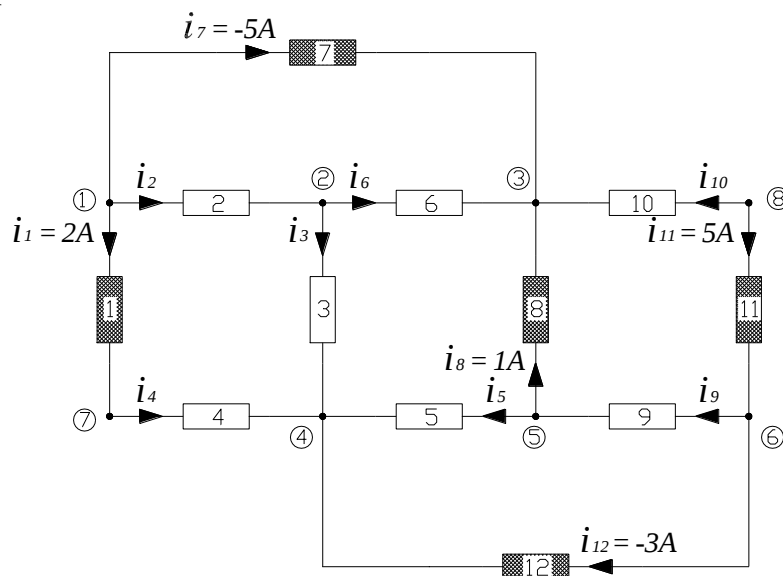


Figura 27:

Si chiede di dedurre tutte le altre correnti applicando la KCL.

Il metodo consiste in: per ogni bipolo la cui corrente è incognita dobbiamo trovare una superficie chiusa che interseca quel bipolo unitamente a bipoli con correnti note. In questo modo infatti si può scrivere una equazione in cui la sola incognita è la corrente desiderata. Per esempio, si vede che considerando una superficie chiusa che circonda il nodo 7 possiamo scrivere l'equazione:

$$i_1 - i_4 = 0 \rightarrow i_4 = i_1 = 2A$$

Allo stesso modo per il nodo 8:

$$i_{10} + i_{11} = 0 \rightarrow i_{10} = -i_{11} = -5A$$

Per trovare i_2 , considerando la superficie chiusa che circonda il nodo 1 e taglia i bipoli (b_1, b_2, b_7) abbiamo:

$$i_2 + i_1 + i_7 = 0 \rightarrow i_2 = -i_1 - i_7 = -2 + 5 = 3A$$

Per trovare i_3 , considerando la superficie chiusa che taglia i bipoli (b_1, b_3, b_8, b_{11}) abbiamo:

$$i_3 + i_1 - i_8 + i_{11} = 0 \rightarrow i_3 = -2 + 1 - 5 = -6A$$

Per determinare i_5 abbiamo ora due possibilità:

- possiamo analizzare la superficie chiusa che taglia i bipoli (b_5, b_{12}, b_8, b_{11}) per cui:

$$i_5 + i_8 - i_{11} + i_{12} = 0 \rightarrow i_5 = -1 + 5 + 3 = 7A$$

- oppure possiamo sfruttare i calcoli precedenti dai cui abbiamo ricavato i_3 e i_4 e applicare la KCL al nodo 4:

$$i_5 + i_{12} + i_3 + i_4 = 0 \rightarrow i_5 = +3 + 6 - 2 = 7A$$

che porta, come deve essere, allo stesso risultato.

In modo analogo si trova:

$$i_9 - i_{11} + i_{12} = 0 \rightarrow i_9 = 5 + 3 = 8A$$

ed infine:

$$i_6 + i_7 + i_8 - i_{11} = 0 \rightarrow i_6 = +5 - 1 + 5 = 9A$$

Passiamo alle tensioni e supponiamo che siano state misurate le tensioni

$$v_1 = 10V; \quad v_3 = 5V; \quad v_6 = 2V; \quad v_7 = -3V; \quad v_8 = 1V; \quad v_{10} = 8V \quad v_{11} = -3V$$

corrispondenti ai bipoli anneriti. Si chiede di determinare le tensioni di tutti gli altri bipoli.

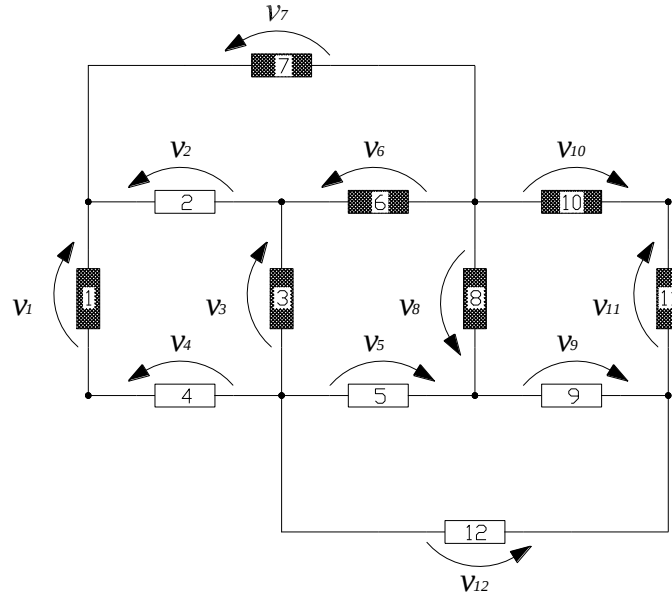


Figura 28:

Il procedimento consiste nell'individuare per ogni bipolo la cui tensione è incognita un insieme di bipoli che formino unitamente ad esso una maglia in modo tale che l'equazione di bilancio della tensione KVL abbia una sola incognita.

Per esempio, troviamo la tensione v_2 considerando la maglia formata dai bipoli (b₂, b₇, b₆); si ha:

$$v_2 - v_7 + v_6 = 0 \rightarrow v_2 = +v_7 - v_6 = -3 - 2 = -5V$$

Per calcolare v_4 , considerando la maglia formata dai bipoli (b₄, b₁, b₂, b₃), si ha:

$$v_4 + v_1 - v_2 - v_3 = 0 \rightarrow v_4 = -v_1 + v_2 + v_3 = -10 - 5 + 5 = 10V$$

Per calcolare v_{12} , considerando la maglia formata dai bipoli (b₁₂, b₁₁, b₁₀, b₆, b₃), si ha:

$$v_{12} + v_{11} - v_{10} + v_6 - v_3 = 0 \rightarrow v_{12} = -v_{11} + v_{10} - v_6 + v_3 = 3 + 5 - 2 + 8 = 14V$$

Per v_9 si ha:

$$v_9 + v_{11} - v_{10} + v_8 = 0 \rightarrow v_9 = -v_{11} + v_{10} - v_8 = 3 + 8 - 1 = 10V$$

Per v_5 si ha:

$$v_5 + v_9 = v_{12} \rightarrow v_5 = v_{12} - v_9 = 14 - 10 = 4V$$

Completiamo l'esercizio determinando i potenziali di nodo assumendo il nodo 7 come riferimento dunque $e_7 = 0V$.

Il potenziale e_1 , per esempio, rappresenta la tensione elettrica che si misura tra il nodo 1 ed il nodo 7 e dunque corrisponde alla tensione v_1 sul lato o bipolo b₁:

$$e_1 = v_1 = 10V$$

Per determinare il potenziale e_2 si considera il cammino che dal nodo 7 va al nodo 2 passando dal nodo 1. Applicando la proprietà additiva delle tensioni abbiamo:

$$e_2 = v_1 - v_2 = 10 + 5 = 15V$$

Generalizzando si ottiene:

$$e_4 = -v_4 = 10V$$

$$e_5 = -v_4 + v_5 = +10 + 4 = 14V$$

$$e_3 = e_2 - v_6 = 15 - 2 = 13V$$

$$e_8 = e_3 + v_{10} = 13 + 8 = 21V$$

$$e_6 = e_8 - v_{11} = 21 + 3 = 24V \quad oppure \quad e_6 = e_5 + v_9 = 14 + 10 = 24V$$

Osservate come dai potenziali ai nodi, in modo inverso, si determinano univocamente le tensioni di lato.